

## 1. FOKSZÁMSOROZATOK REALIZÁCIÓJA

1.− Létezik-e olyan gráf, amelynek fokszámsorozata

- a) 9, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 1
- b) 8, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 1?

2.− Létezik-e olyan hurokélmentes gráf, amelynek fokszámsorozata

- a) 65, 32, 16, 8, 4, 2, 1
- b) 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1?

3. (**Havel–Hakimi-algoritmus.**) Az előadáson tanult tétel segítségével döntsük el, hogy létezik-e olyan *egyszerű* gráf, amelynek fokszámsorozata

- a) 7, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 0
- b) 8, 8, 6, 6, 6, 5, 3, 2, 2
- c) 7, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 2
- d) 5, 4, 4, 2, 2, 1?

4. Hány olyan (páronként nem izomorf) egyszerű gráf van, melynek a fokszámsorozata 7, 7, 7, 7, 5, 5, 4, 4?

5. Létezik-e olyan *összefüggő* gráf, amelynek fokszámsorozata 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1?

6. Létezik-e olyan *páros* gráf, amelynek fokszámsorozata 9, 9, 9, 9, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 3?

7. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik  $n$  pontú  $k$ -reguláris *egyszerű* gráf, ha  $kn$  páros és  $k \leq n - 1$ .

8. Az **Erdős–Gallai-tétel** szerint a nemnegatív egészekből álló  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  sorozat pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$(1) \quad d_1 + \dots + d_n \text{ páros, és}$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k), \quad \text{minden } k \in \{1, \dots, n\}\text{-re.}$$

Bizonyítsuk be a feltételek szükségességét.

9. Legyen  $n \geq 2$ . Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráffal realizálható  $d_1, \dots, d_n$  sorozat pontosan akkor realizálható *összefüggő* egyszerű gráffal, ha  $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2(n-1)$ , és a sorozat minden tagja pozitív.