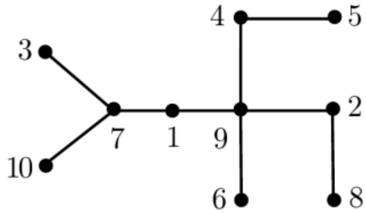
2. Fák összeszámlálása

1.$^-$ Hány feszítőfája van P_n-nek, illetve C_n-nek?

2.$^-$ K_n feszítőfái között hány csillag, illetve hány út van (ha $n \geq 3$)?

3.$^-$ Hány olyan feszítőfája van K_n-nek, amelyben a v kitüntetett csúcs levél (ha $n \geq 3$)?

4. Határozza meg az ábrán látható címkézett fa Prüfer-kódját:



5. a) Adja meg azt a címkézett fát, amelynek a Prüfer-kódja $5, 3, 3, 3, 1, 4$.
b) Adja meg azt a címkézett fát, amelynek a Prüfer-kódja $1, 5, 1, 5, 9, 8, 2$.

6. Vezesse le a Cayley-tételt a Kirchhoff-formulából.

7. Az n pontú teljes gráfból elhagyunk egy élt ($n \geq 3$). A kapott gráfnak hány feszítőfája van?

8. Mi az olyan fák száma a $\{v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ pontokon, melyekben minden él egy v_i-t köt össze egy w_j-vel?

9.$^+$ Legyen $n \geq 2$. Egy n pontú út minden pontját összekötjük egy új külső ponttal. Mutassuk meg, hogy az így kapott $n+1$ pontú gráf feszítőfáinak száma az F_{2n-1} Fibonacci-szám ($F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 2, \ldots$ indexeléssel).

10.$^+$ Adott n darab különböző szín: $c_1, \ldots, c_n$. Hányféleképpen lehet egy c_1 színű, egy c_2 színű, ... , és egy c_n színű kört elhelyezni a síkon úgy, hogy a körvonalaknak (páronként) ne legyen közös pontja? Két lerakást pontosan akkor tekintünk egyformának, ha az egyik lerakás átdeformálható a másikba úgy, hogy a köröket egymástól függetlenül mozgathatjuk és nagyíthatjuk/kicsinyíthetjük, de végig megtartva azt a tulajdonságot, hogy a körök nem metszik egymást.