1. Fokszámsorozatok realizációja

1. $^{-}$ Létezik-e olyan gráf, amelynek fokszámsorozata
a) $9, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 1$
b) $8, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 1$?

2. $^{-}$ Létezik-e olyan hurokélmentes gráf, amelynek fokszámsorozata
a) $65, 32, 16, 8, 4, 2, 1$
a) $64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 1$?

3. (Havel–Hakimi-algoritmus.) Az előadáson tanult tétel segítségével döntsük el, hogy létezik-e olyan *egyszerű* gráf, amelynek fokszámsorozata
a) $7, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 0$
b) $8, 8, 6, 6, 6, 5, 3, 2, 2$
c) $7, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 2$
d) $5, 4, 4, 2, 2, 1$?

4. Hány olyan (páronként nem izomorf) egyszerű gráf van, melynek a fokszámsorozata $7, 7, 7, 7, 5, 5, 4, 4$?

5. Létezik-e olyan *összefüggő* gráf, amelynek fokszámsorozata $4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$?

6. Létezik-e olyan *páros* gráf, amelynek fokszámsorozata $9, 9, 9, 9, 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$?

7. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik n pontú k-reguláris *egyszerű* gráf, ha kn páros és $k \leq n - 1$.

8. Az **Erdős–Gallai-tétel** szerint a nemnegatív egészekből álló $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ sorozat pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$d_1 + \cdots + d_n \text{ páros,} \quad \text{és} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k), \quad \text{minden } k \in \{1, \ldots, n\}\text{-re.} \tag{2}$$

Bizonyítsuk be a feltételek szükségességét.

9. Legyen $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráffal realizálható $d_1, \ldots, d_n$ sorozat pontosan akkor realizálható *összefüggő* egyszerű gráffal, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2(n-1)$, és a sorozat minden tagja pozitív.