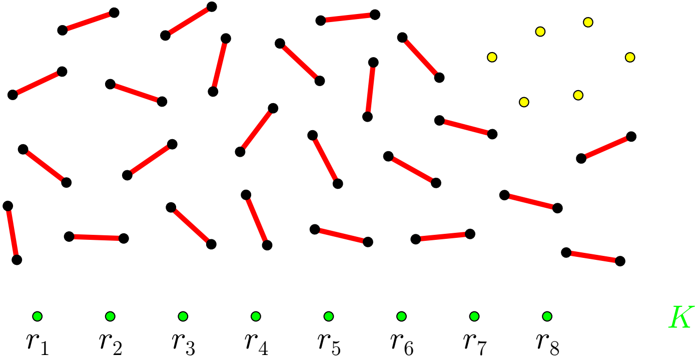
Párosítási algoritmusok
(magyar módszer + Edmonds-algoritmus)

Gráfelmélet

4. előadás

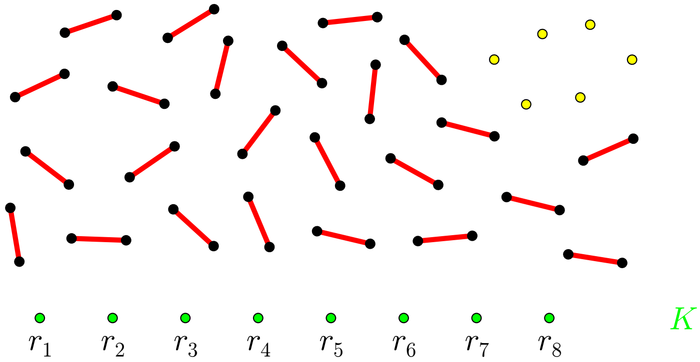
SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2015. október 9.



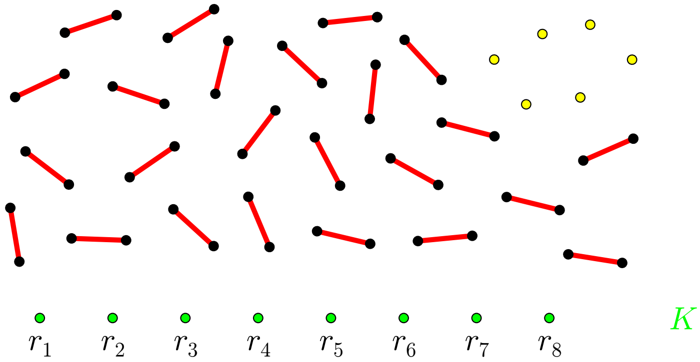
MAGYAR MÓDSZER

INPUT: G páros gráf és benne egy M párosítás, ami nem teljes.
OUTPUT: Egy javító út M-hez, vagy „M maximális méretű”.

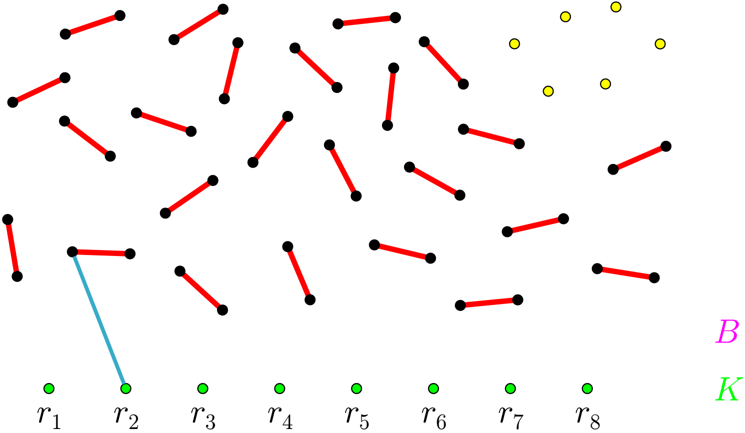


MAGYAR MÓDSZER

INPUT: G páros gráf és benne egy M párosítás, ami nem teljes. Az algoritmus menete: A javítóút-kezdeményeket felfűzzük egy erdőbe, melynek gyökerei az A-beli párosítatlan pontok. (G színosztályai: A és F.) A gyökerekből kiindulva mohó módon építjük fel az erdőt, a következő dián szereplő „dupla ághajtásokkal”.

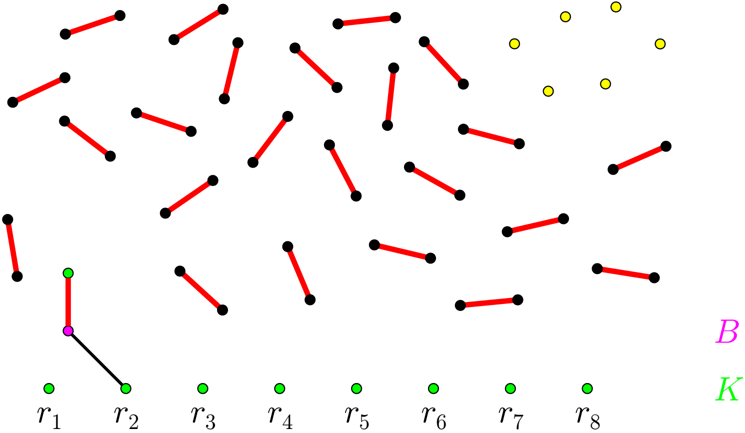


Az algoritmus menete: A javítóút-kezdeményeket felfűzzük egy erdőbe, melynek gyökerei az A-beli párosítatlan pontok. (G színosztályai: A és F.) A gyökerekből kiindulva mohó módon építjük fel az erdőt, a következő dián szereplő „dupla ághajtásokkal”. Kezdetben csak a gyökerek a külső pontok: $K = \{r_1, \ldots, r_8\}$. Kezdetben nincs belső pont: $B = \emptyset$.



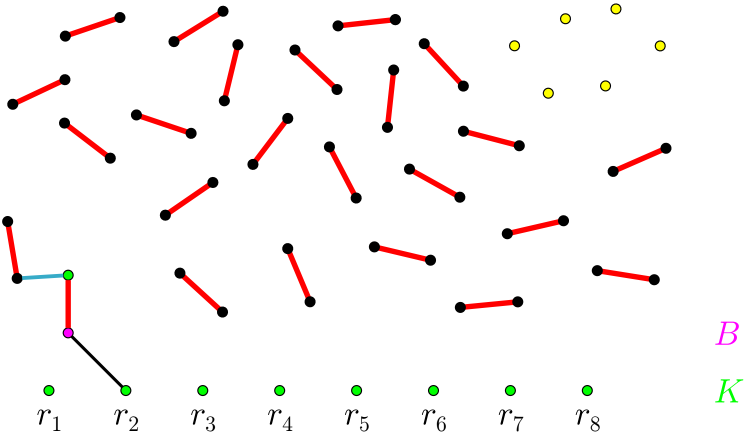
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ágheajtással”).

A szóban forgó erdőn kívüli pont belső lesz, a párja külső.



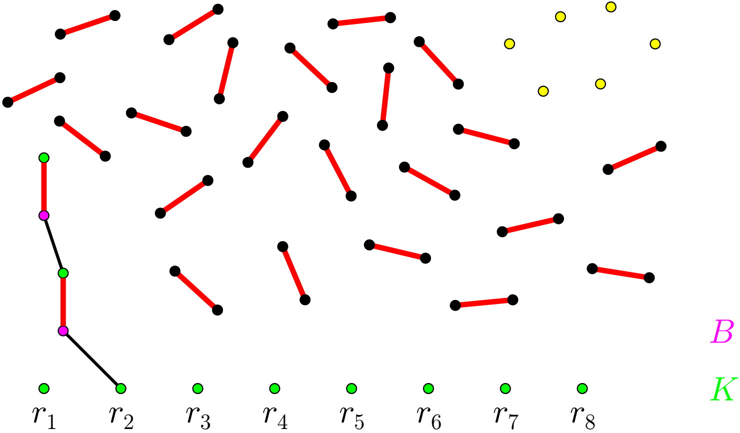
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ághajtással”).

A szóban forgó erdőn kívüli pont belső lesz, a párja külső.



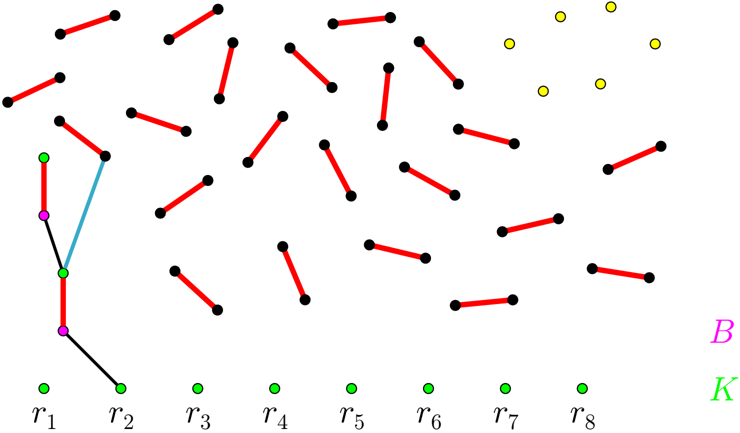
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ághajtással”).

A szóban forgó erdőn kívüli pont belső lesz, a párja külső.



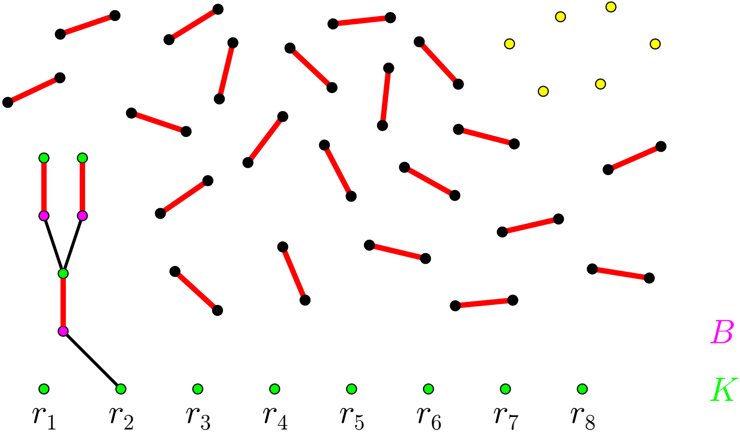
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ágházással”).

A szóban forgó erdőn kívüli pont belső lesz, a párja külső.



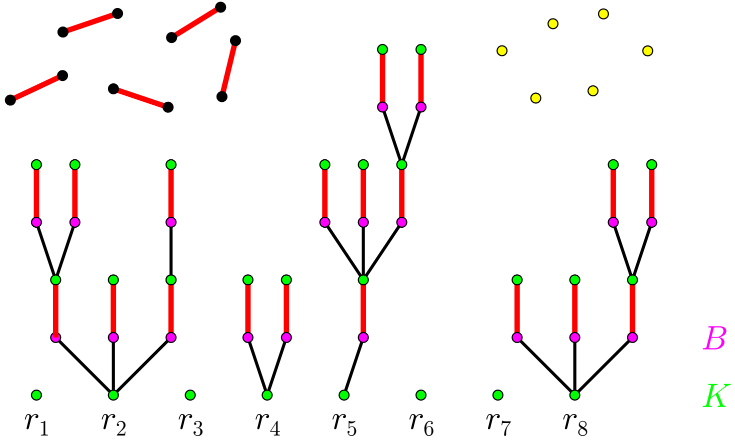
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ághajtással”).

A szóban forgó erdőn kívüli pont belső lesz, a párja külső.



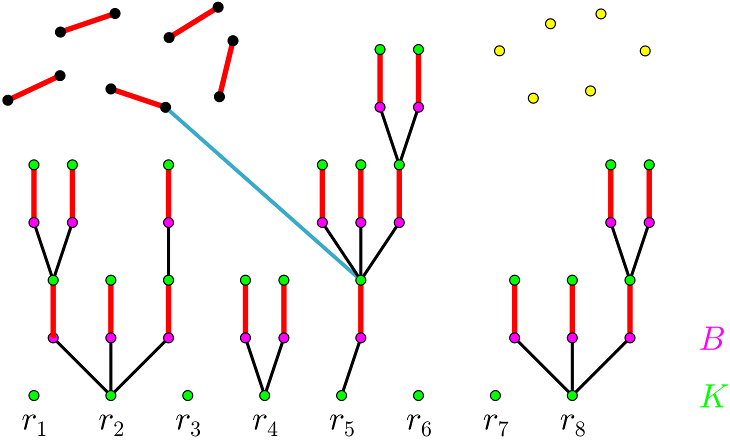
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ágháztassal”).

A szóban forgó erdőn kívüli pont belső lesz, a párja külső.



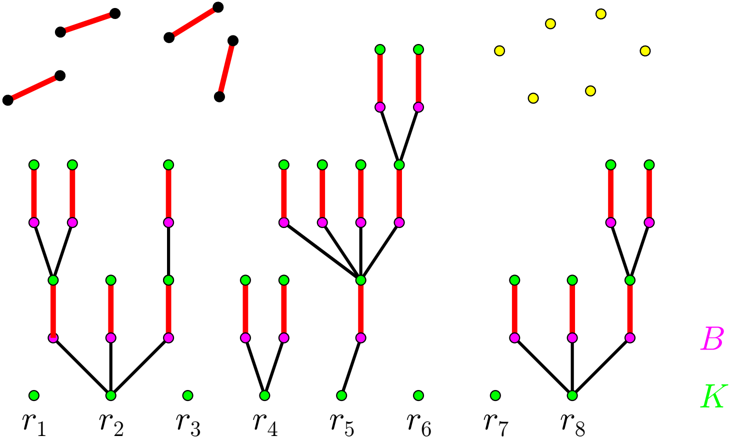
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ágahajtással").

Megjegyzés. Mindvégig igaz, hogy $K \subseteq A$ és $B \subseteq F$.



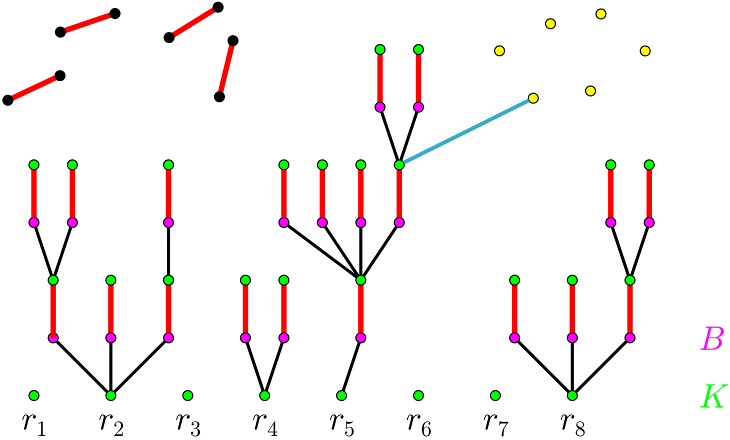
Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ághajtással”).

Megjegyzés. Mindvégig igaz, hogy $K \subseteq A$ és $B \subseteq F$.

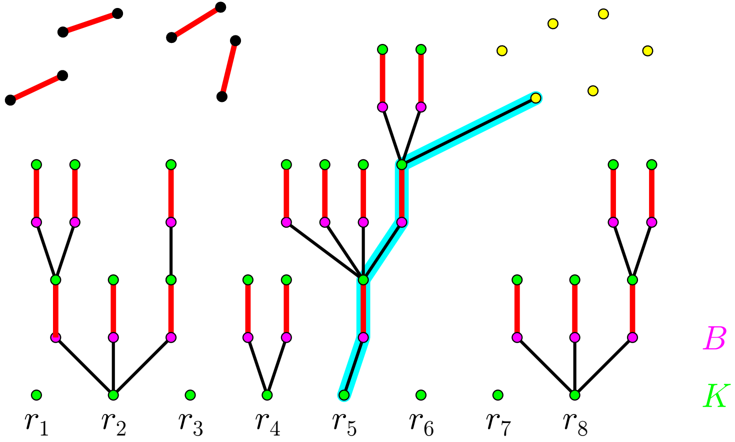


Mohó bővítési lépés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosított pontba, akkor bővítjük az erdőt ezzel a ponttal és az M-beli párjával („dupla ághajtással”).

Megjegyzés. Mindvégig igaz, hogy $K \subseteq A$ és $B \subseteq F$.

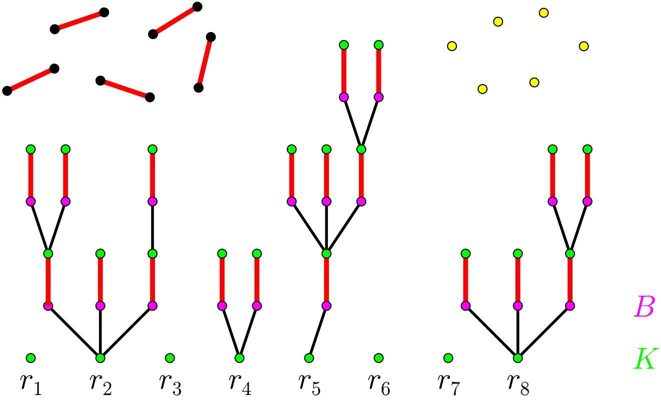


Sikeres keresés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosítatlan pontba, akkor javító utat találtunk. STOP.



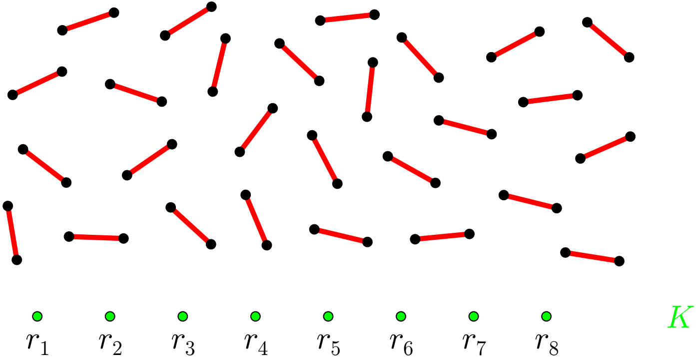
Sikeres keresés: Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli párosítatlan pontba, akkor javító utat találtunk. STOP.

OUTPUT: A megtalált javító út.



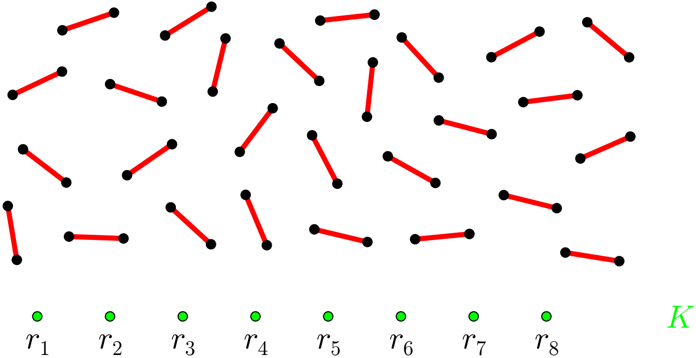
Sikertelen keresés: Ha nem találtunk javító utat, és nem is tudjuk mohó módon bővíteni az erdőt, azaz ha a külső pontokból már csak erdőbeli pontokba vezet él, STOP.

OUTPUT: „Az M párosítás maximális méretű, azaz $\nu(G) = |M|$. Ezt a K Kőnig-akadály bizonyítja."



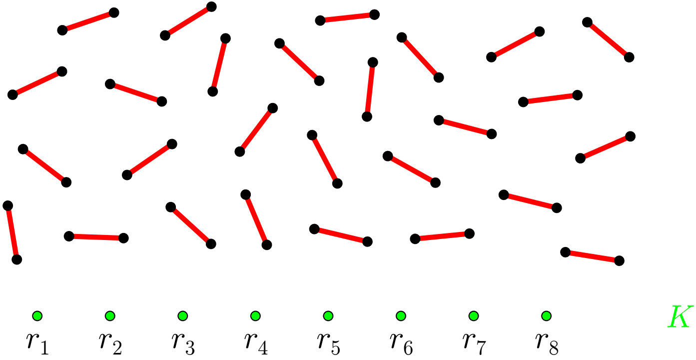
EDMONDS-ALGORTIMUS

INPUT: G általános gráf és egy M párosítása, ami nem teljes.
OUTPUT: Egy javító út M-hez, vagy „M maximális méretű”.

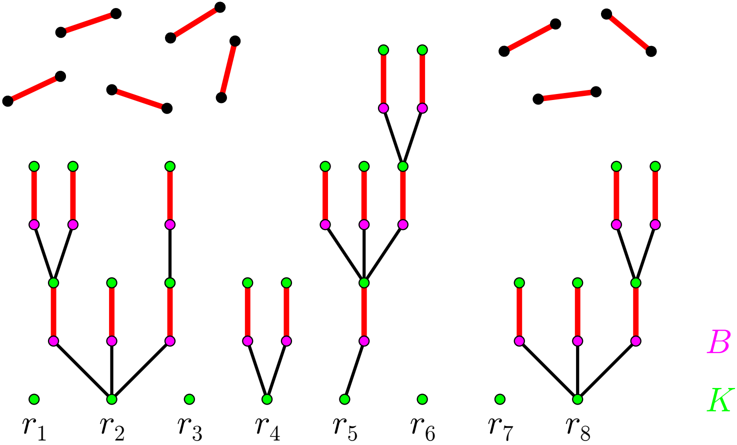


EDMONDS-ALGORTIMUS

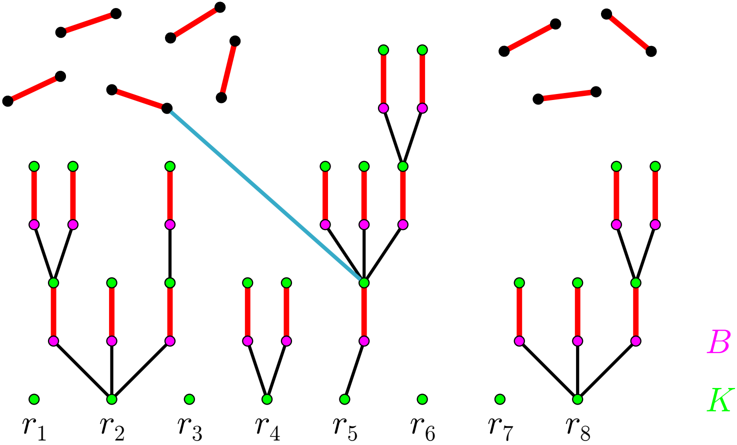
INPUT: G általános gráf és egy M párosítása, ami nem teljes.
OUTPUT: Egy javító út M-hez, vagy „M maximális méretű”.
A javítóút-kezdeményeket felfűző erdő gyökerei (tehát a kiindulási külső pontok) most G párosítatlan pontjai lesznek (az összes).
Az erdőn kívül most soha nem lesznek párosítatlan pontok!



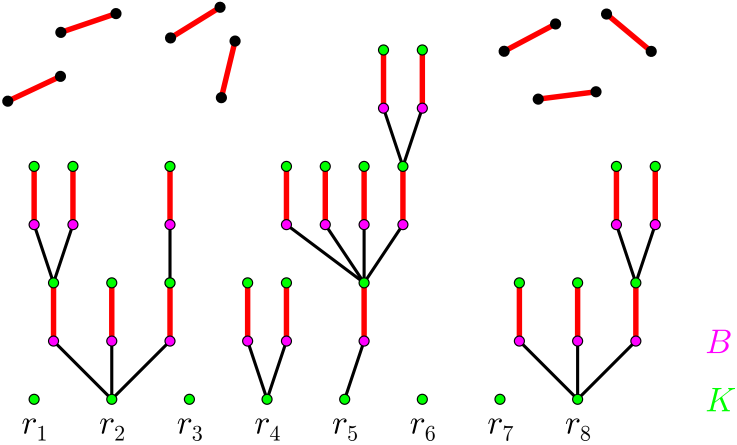
A következő diákon ismertetjük majd az Edmonds-algoritmus 3 megengedett lépését. Az „alapértelmezett" lépés most is a magyar módszernél látott mohó bővítés lesz (1. típus).



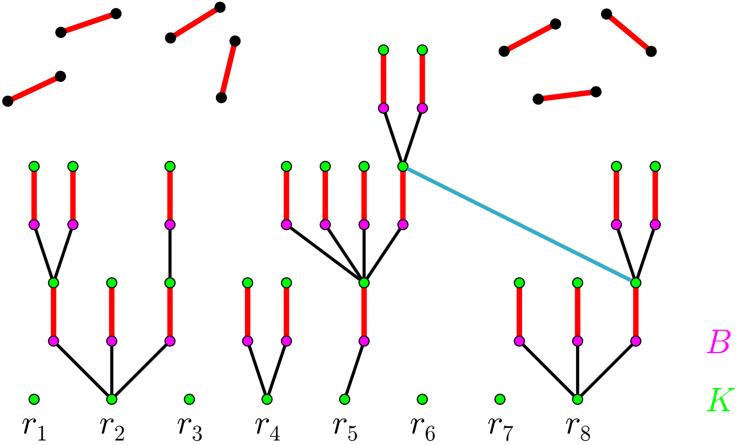
Az „alapértelmezett” lépés most is a magyar módszernél látott mohó bővítés lesz (1. típus). Például, a gyökerekből kiindulva 19 mohó bővítési lépés után kaphatjuk az ábrán látható erdőt.



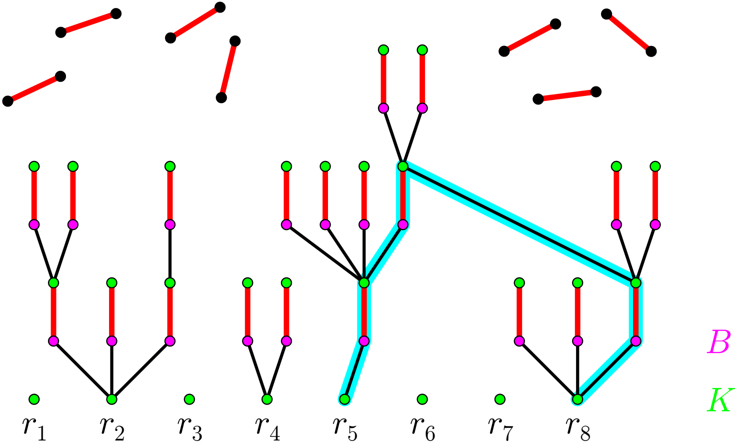
1. típus (mohó bővítés): Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli pontba, akkor bővítjük az erdőt a ponttal és az M-beli párjával. Ez az alapértelmezett lépés. (A külső és belső pontok kiosztása ugyanúgy történik, mint a páros esetben.)



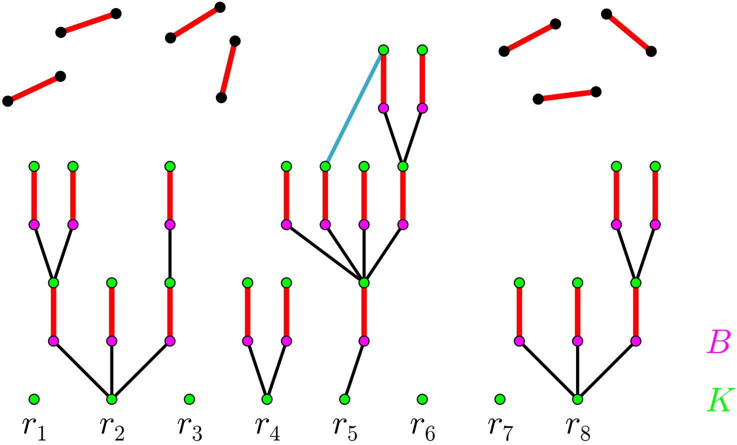
1. típus (mohó bővítés): Ha valamelyik külső pontból vezet él erdőn kívüli pontba, akkor bővítjük az erdőt a ponttal és az M-beli párjával. Ez az alapértelmezett lépés. (A külső és belső pontok kiosztása ugyanúgy történik, mint a páros esetben.)



2. típus (sikeres keresés): Ha valamelyik külső pont össze van kötve az erdő egy másik komponenséhez tartozó külső ponttal, akkor javító utat találtunk (az aktuális gráfban, vö. 3. típus). STOP.

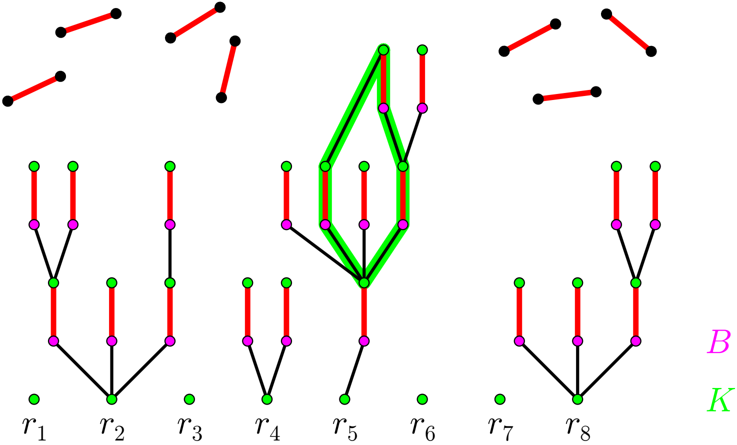


2. típus (sikeres keresés): Ha valamelyik külső pont össze van kötve az erdő egy másik komponenséhez tartozó külső ponttal, akkor javító utat találtunk (az aktuális gráfban, vö. 3. típus). STOP.



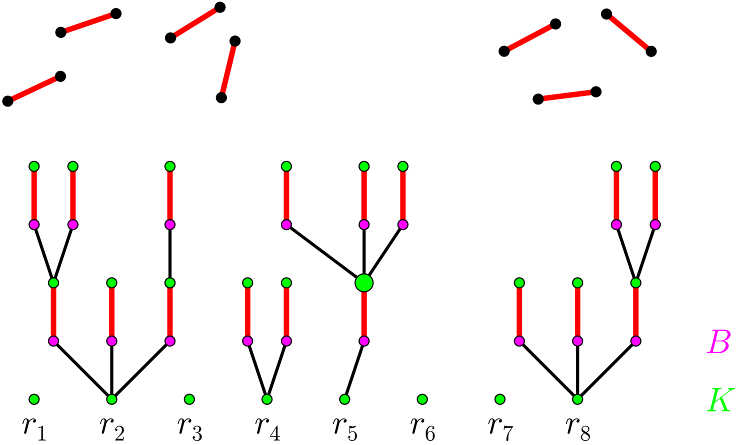
3. típus (zsugorítás): Ha azonos komponensben lévő két külső pont között találunk élt, akkor a kialakuló páratlan kört zsugorítjuk, és a kapott gráfon dolgozunk tovább.

Az egy ponttá zsugorodott kör egy külső pont lesz.

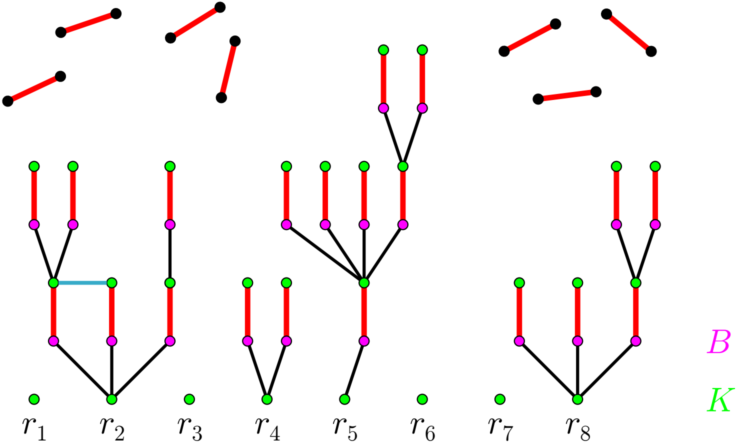


3. típus (zsugorítás): Ha azonos komponensben lévő két külső pont között találunk élt, akkor a kialakuló páratlan kört zsugorítjuk, és a kapott gráfon dolgozunk tovább.

Az egy ponttá zsugorodott kör egy külső pont lesz.

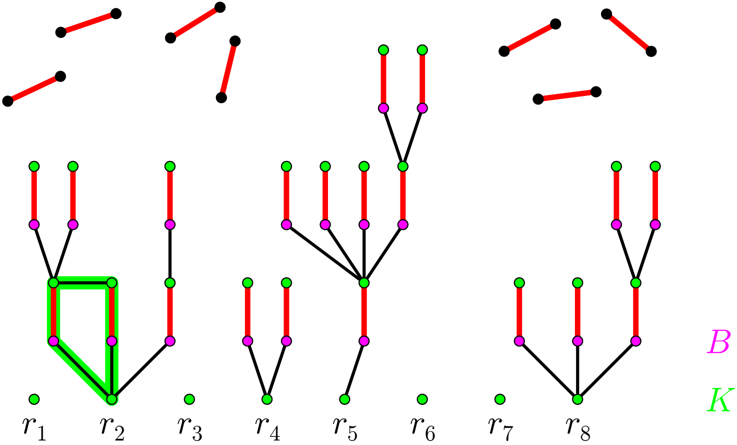


3. típus (zsugorítás): Ha azonos komponensben lévő két külső pont között találunk élt, akkor a kialakuló páratlan kört zsugorítjuk, és a kapott gráfon dolgozunk tovább.
Az egy ponttá zsugorodott kör egy külső pont lesz.



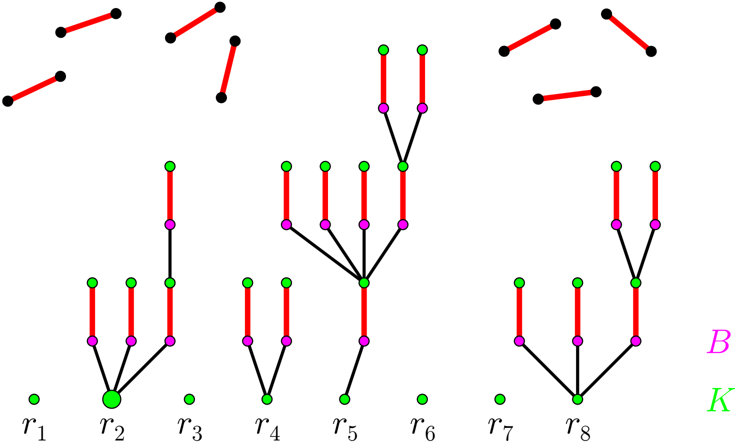
3. típus (egy másik példa): Ha azonos komponensben lévő két külső pont között találunk élt, akkor a kialakuló páratlan kört zsugorítjuk, és a kapott gráfon dolgozunk tovább.

Az egy ponttá zsugorodott kör egy külső pont lesz.



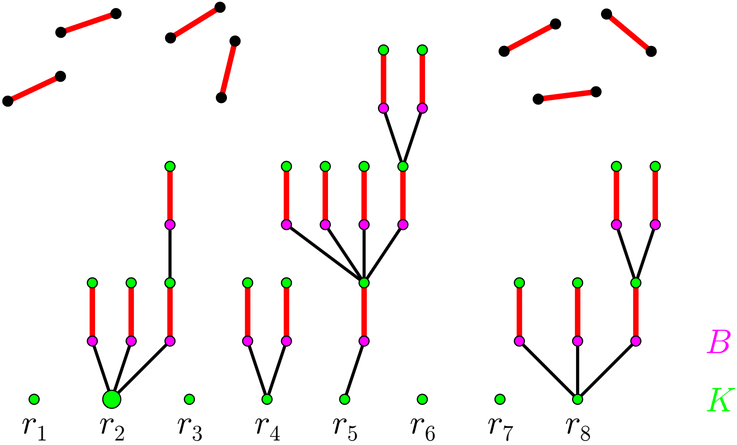
3. típus (egy másik példa): Ha azonos komponensben lévő két külső pont között találunk élt, akkor a kialakuló páratlan kört zsugorítjuk, és a kapott gráfon dolgozunk tovább.

Az egy ponttá zsugorodott kör egy külső pont lesz.



3. típus (egy másik példa): Ha azonos komponensben lévő két külső pont között találunk élt, akkor a kialakuló páratlan kört zsugorítjuk, és a kapott gráfon dolgozunk tovább.

Az egy ponttá zsugorodott kör egy külső pont lesz.



Megjegyzés: Az 1-3. típusú lépések közül bármelyiket bármikor végrehajthatjuk. De mivel a zsugorító lépés bonyolult, ezért célszerű csak olyankor végrehajtani, ha másfajtát már nem lehet (és utána újra az 1-2. lépésekkel próbálkozni).

Előfordulhat, hogy a zsugorító lépést többször is végre kell hajtani, míg el nem akadunk.

Előfordulhat, hogy a zsugorító lépést többször is végre kell hajtani, míg el nem akadunk.

Kétféle végkifejlet lehetséges:

1. Sikeres keresés: Ha javító utat találunk az esetleg többször is zsugorított aktuális gráfban (lásd 2. típusú lépés), akkor a megtalált javító út „visszatranszformálható” a kiindulási G gráf és M párosítás javító útjává.
OUTPUT: Az így kapott G-beli javító út.

Előfordulhat, hogy a zsugorító lépést többször is végre kell hajtani, míg el nem akadunk.

Kétféle végkifejlet lehetséges:

1. Sikeres keresés: Ha javító utat találunk az esetleg többször is zsugorított aktuális gráfban (lásd 2. típusú lépés), akkor a megtalált javító út „visszatranszformálható” a kiindulási G gráf és M párosítás javító útjává.
OUTPUT: Az így kapott G-beli javító út.

2. Sikertelen keresés: Ha nem találtunk javító utat, de elakadtunk, mert az összes külső pont csak belső pontokkal van összekötve, akkor a kiindulási M párosítás maximális méretű az eredeti G gráfban*, vagyis $\nu(G) = |M|$.
OUTPUT: „M maximális méretű párosítás G-ben.”

Kétféle végkifejlet lehetséges:

1. Sikeres keresés: Ha javító utat találunk az esetleg többször is zsugorított aktuális gráfban (lásd 2. típusú lépés), akkor a megtalált javító út „visszatranszformálható" a kiindulási G gráf és M párosítás javító útjává.
OUTPUT: Az így kapott G-beli javító út.

2. Sikertelen keresés: Ha nem találtunk javító utat, de elakadtunk, mert az összes külső pont csak belső pontokkal van összekötve, akkor a kiindulási M párosítás maximális méretű az eredeti G gráfban*, vagyis $\nu(G) = |M|$.
OUTPUT: „M maximális méretű párosítás G-ben."

* Sikertelen keresésnél a B ponthalmaz a zsugorítások visszacsinálása után egy olyan Tutte-akadály lesz G-ben, amely bizonyítja, hogy $\nu(G) \leq |M|$. (Miért?) Ezt a bizonyítékot célszerű is hozzáadni az OUTPUT-hoz.

Az Edmonds-algoritmus gyors (polinomidejű), a gyakorlatban is használható. Ha kiindulunk a G gráf egy tetszőleges párosításából (például egyetlen élből mint triviális párosításból), akkor az Edmonds-algoritmus ismételt végrehajtásával mindig eggyel több élt tartalmazó párosítást nyerünk, amíg el nem jutunk G egy teljes párosításáig, vagy sikertelen javítóút-keresés esetén egy maximális méretű (de nem teljes) párosításig. Ily módon $\nu(G)$ értékét hatékonyan meg tudjuk határozni.

Sőt, nemcsak $\nu(G)$ értékét számoljuk ki a fenti módon, hanem az algoritmus megkonstruál egy $\nu(G)$ méretű párosítást is, egy maximalitást bizonyító Tutte-akadállyal együtt (ha nem teljes a párosítás). Az algoritmus tehát bizonyítékokat is szolgáltat válaszának helyességére, melynek ellenőrzéséhez nem kell ismerni/érteni az algoritmust!

Páros gráfok esetén ugyanez mondható el a magyar módszerről.