Lineáris rekurziók alaptétele

Definíció. Legyenek $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ rögzített számok, ahol $c_d \neq 0$. Az

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_{d-1} a_{n-d+1} + c_d a_{n-d} \qquad (\text{ha } n \geq 2)$$

d-edrenű lineáris rekurzió *karakterisztikus polinomján* a

$$p(x) = x^d - c_1 x^{d-1} - c_2 x^{d-2} - \dots - c_{d-1} x - c_d$$

polinomot értjük.

Példák. A kar. polinomot úgy kapjuk meg, hogy a lineáris rekurzió 0-ra redukált alakjában az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-d}$ szimbólumokat rendre az $x^d, x^{d-1}, \dots, 1$ monomokra cseréljük:

$$\begin{aligned} a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} &\rightsquigarrow p(x) = x^2 - 3x - 2 \\ a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3} &\rightsquigarrow p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ a_n = 5_{n-1} - 7a_{n-3} &\rightsquigarrow p(x) = x^3 - 5x^2 + 7 \quad (!) \end{aligned}$$

A generátorfüggvény-módszer kielemzéséből adódik a következő két tétel (lényegi része):

Lineáris rekurziók alaptétele (speciális eset). Tekintsük az

$$(\clubsuit) \qquad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_d a_{n-d} \quad (\text{ha } n \geq d)$$

d-edrendű lineáris rekurziót ($c_d \neq 0$). Tegyük fel, hogy a ($\clubsuit$) rekurzió $p(x)$ karakterisztikus polinomjának d darab **különböző** gyöke van: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$, azaz

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_d),$$

ahol $\lambda_i \neq \lambda_j$ (ha $i \neq j$). Ekkor igaz a következő:

Egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor elégíti ki a ($\clubsuit$) rekurziót, ha előáll a

$$\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_d^n$$

sorozatok lineáris kombinációjaként, azaz ha valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ számokra*

$$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \dots + \alpha_d \lambda_d^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Lineáris rekurziók alaptétele (általános eset). Tekintsük az

$$(\clubsuit) \qquad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_d a_{n-d} \quad (\text{ha } n \geq d)$$

d-edrendű lineáris rekurziót ($c_d \neq 0$). Tegyük fel, hogy a ($\clubsuit$) rekurzió $p(x)$ karakterisztikus polinomjának d gyöke van: $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1\text{-szer}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{d_2\text{-ször}}, \dots, \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_k}_{d_k\text{-szor}}$, azaz

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} (x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_k)^{d_k},$$

ahol $\lambda_i \neq \lambda_j$ (ha $i \neq j$), és $d_1 + \dots + d_k = d$. Ekkor igaz a következő:

Egy $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat akkor és csak akkor elégíti ki a ($\clubsuit$) rekurziót, ha előáll a

$$\underbrace{\lambda_1^n,\, n\lambda_1^n,\, n^2\lambda_1^n,\, \dots,\, n^{d_1-1}\lambda_1^n}_{d_1 \text{ sorozat}},\ \underbrace{\lambda_2^n,\, n\lambda_2^n,\, n^2\lambda_2^n,\, \dots,\, n^{d_2-1}\lambda_2^n}_{d_2 \text{ sorozat}}, \dots,\ \underbrace{\lambda_k^n,\, n\lambda_k^n,\, \dots,\, n^{d_k-1}\lambda_k^n}_{d_k \text{ sorozat}}$$

sorozatok lineáris kombinációjaként, azaz ha léteznek olyan $P_1, P_2, \dots, P_k$ polinomok, hogy P_i foka legfeljebb $d_i - 1$ (minden $1 \leq i \leq k$-ra), és

$$a_n = P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \dots + P_k(n)\lambda_k^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

* Az olvashatóság kedvéért ebben a segédanyagban a sorozatokat pongyolán jelöljük, például a λ^n sorozaton természetesen a $(\lambda^n)_{n=0}^{\infty} = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$ sorozatot értjük.

Megjegyzés. Nem véletlenül használtuk a lineáris kombináció szót. A (végtelen) sorozatok vektorteret alkotnak (az összeadás művelet az elemenkénti összeadás, a skalárral való szorzás pedig az elemenkénti skalárral való szorzás). Könnyű látni, hogy ebben a vektortérben egy rögzített (♣) lineáris rekurzió megoldásai alteret alkotnak. **Az alaptétel ezen altér egy bázisát adja meg.** (Nem mondtuk ki ott, de az is igaz, hogy minden megoldás egyértelműen áll elő a tételbeli „bázismegoldások” lineáris kombinációjaként.)

Megjegyzés. A komplex számok teste fölött dolgozva egy d-edfokú polinomnak mindig d gyöke van (ez az algebra alaptétele), így a lineáris rekurziók alaptétele mindig használható, ha komplex számokat is megengedünk a megoldás leírásához.

Alkalmazások.

1. példa: *Oldjuk meg a következő lineáris rekurziót:*

$$\text{(K.É.)}\qquad a_0 = 8,\quad a_1 = 1,$$

$$(*)\qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \ \ (\text{ha } n \geq 2).$$

Megoldás. Határozzuk meg a karakterisztikus polinom gyökeit:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Két (különböző) gyök van: -1 és 2. Az alaptétel szerint a $(*)$ rekurzív feltétel megoldásai *pontosan* az $a_n = \alpha\cdot(-1)^n + \beta\cdot 2^n$ alakú sorozatok, ahol α és β tetszőleges rögzített számok lehetnek. Ezen sorozatok között kell tehát megtalálni azt, amelyre a (K.É.) kezdeti feltételek is teljesülnek. (Azért fogalmaztunk egyes számban, mert előre tudjuk, hogy a $(*)$+(K.É.) feltételrendszernek egyetlen sorozat tesz eleget.) Egy $a_n = \alpha\cdot(-1)^n + \beta\cdot 2^n$ alakú sorozatra pontosan akkor teljesülnek az $a_0 = 8$ és $a_1 = 1$ feltételek, ha

$$\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_1 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} \alpha\cdot(-1)^0 + \beta\cdot 2^0 = 8 \\ \alpha\cdot(-1)^1 + \beta\cdot 2^1 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ -\alpha + 2\beta = 1. \end{cases}$$

Az utóbbi egyenletrendszer megoldása $\alpha = 5$, $\beta = 2$. Kaptuk tehát, hogy a feladatbeli sorozat $\boxed{a_n = 5\cdot(-1)^n + 3\cdot 2^n}$.

2. példa: *Oldjuk meg a következő lineáris rekurziót:*

$$a_0 = 7,\ a_1 = -2,\ a_2 = 14;\quad a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3}\ \ (\text{ha } n \geq 3).$$

Megoldás: Meghatározzuk a karakterisztikus polinom gyökeit:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x-2)^2(x+3) = 0$$

Három gyök van: a 2 kétszeres gyök, a -3 pedig egyszeres, így most a (kezdőértékek nélküli) lineáris rekurzió megoldásai pontosan az $a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n + \gamma(-3)^n$ alakú sorozatok. A kezdőértékek figyelembevételével megkapjuk a mi sorozatunkhoz tartozó együtthatókat:

$$\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 14 \end{cases} \equiv \begin{cases} \alpha 2^0 + \beta\cdot 0\cdot 2^0 + \gamma(-3)^0 = 7 \\ \alpha 2^1 + \beta\cdot 1\cdot 2^1 + \gamma(-3)^1 = -2 \\ \alpha 2^2 + \beta\cdot 2\cdot 2^2 + \gamma(-3)^2 = 14 \end{cases} \equiv \begin{cases} \alpha + \gamma = 7 \\ 2\alpha + 2\beta - 3\gamma = -2 \\ 4\alpha + 8\beta + 9\gamma = 14 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása $\alpha = 5,\ \beta = -3,\ \gamma = 2$, amiből a sorozatunk általános tagja $\boxed{a_n = 5\cdot 2^n - 3n2^n + 2(-3)^n = (5-3n)2^n + 2(-3)^n}$.

3. példa: (Vázlat.) Ha egy olyan hatodrendű lineáris rekurzió megoldásán dolgozunk, amelynek karakterisztikus polinomja $(x-9)^4(x-\sqrt{2})^2$ alakra hozható, tehát a 9 négyszeres, a $\sqrt{2}$ pedig kétszeres gyöke, akkor a megoldást $\alpha 9^n + \beta n 9^n + \gamma n^2 9^n + \delta n^3 9^n + \varepsilon(\sqrt{2})^n + \zeta n(\sqrt{2})^n$ alakban kell keresni. A hat együttható pedig a kezdeti értékekből kitalálható.