10. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Compute

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

More precisely, let $a_1 = \sqrt{2}$ and $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ if $n \geq 1$, and determine $\lim_{n\to\infty} a_n$, if the limit exists.

2. Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3a}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(b-1)a}{b} \right\rfloor = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Segítség: Honlapon.

3. Legyen n páratlan egész. Igazoljuk, hogy ha egy $n\times n$-es szimmetrikus mátrix minden sorában az $1,\dots,n$ elemek egy permutációja áll, akkor a főátlóban is.

4. Jelölje S_n az első n prímszám összegét. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re van négyzetszám S_n és S_{n+1} között.

5. Adottak a $v_1,\dots,v_n$ vektorok $\mathbb{R}^d$-ben, ahol $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $I \subset \{1,\dots,n\}$ indexhalmaz, hogy

$$4\left(\sum_{i\in I} v_i\right)\cdot\left(\sum_{i\notin I} v_i\right) \geq \sum_{i\neq j} v_i\cdot v_j,$$

ahol $\cdot$ a skaláris szorzatot jelöli. (És élünk a $\sum_{i\in\emptyset} v_i = \underline{0}$ megállapodással.)

6. Egy $S \subset \mathbb{R}$ halmaz *jólrendezett*, ha S minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme. Van-e $\mathbb{R}$-nek megszámlálhatatlanul végtelen, jólrendezett részhalmaza?

Megjegyzés: Könnyen meggondolható, hogy S pontosan akkor jólrendezett, ha nincs olyan szigorúan monoton csökkenő végtelen sorozat, amelynek elemei S-ből kerülnek ki.