8. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Show that every composite positive integer can be expressed as $xy + yz + zx + 1$ for some positive integers x, y, z.

2. Legyen n páros szám. Egy $n\times n$-es négyzetrács mezőibe beírjuk a számokat 1-től n^2-ig a természetes kitöltési sorrendben: az i-edik sor elemei balról jobbra haladva

$$(i-1)n+1, (i-1)n+2, \ldots, (i-1)n+n.$$

Majd a négyzetrács mezőit pirosra és kékre színezzük úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a mezők fele legyen piros. Igazoljuk, hogy a piros mezőkbe írt számok összege megegyezik a kék mezőkbe írt számok összegével.

3. Le lehet-e fedni a síkot véges sok parabolalemezzel? (Minden parabola egy konvex és egy nem konvex tartományra osztja a síkot. A konvex tartományt – a határoló parabolát is beleértve – nevezzük parabolalemeznek.)

4. Jelölje $r(n)$ az $x^2+y^2 = n$ kétismeretlenes egyenlet egész megoldásainak számát. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(0) + r(1) + \cdots + r(n)}{n}$$

határértéket.

5. Az $1-1+1-1+1-\ldots$ sor nem konvergens, ezért az $f(x) = x-x^2+x^4-x^8+x^{16}-x^{32}+\ldots$ függvény nem értelmezett az $x = 1$ pontban. A Cauchy–Hadamard-tétel szerint azonban az $f(x)$ határérték létezik minden $0 < x < 1$ valós számra. Döntsük el, hogy az f függvénynek van-e bal oldali határértéke az $x = 1$ pontban.

Segítség: Matematikailag precíz számítógépes módszerekkel kiszámolható, hogy

$$f(0{,}995) = 0{,}50088\ldots$$

6. n gyerek ül egy kör alakú asztal körül, mindegyiknél van néhány cukorka. A tanár minden olyan gyereknek ad egy cukorkát, akinél páratlan sok van; majd (egy időben) minden gyerek a cukorkái felét odaadja a bal szomszédjának. Ezt a két lépést – a tanár „párossá tevő” cukorosztását, majd a bal szomszédnak adást – addig ismételgetik, amíg történik változás a cukorkák számában. Bizonyítsuk be, hogy ez a folyamat egy idő után megáll, azaz előbb-utóbb minden gyereknél ugyanannyi (páros sok) cukorka lesz.