7. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Find a nonzero polynomial $P(x, y)$ such that $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$ for all real numbers a, where $\lfloor x \rfloor$ denotes the integer part of x.

2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Egy $x \in \mathbb{R}$ pontot *árnyékpontnak* nevezünk, ha van olyan x-nél nagyobb $y \in \mathbb{R}$ pont, amelyre $f(y) > f(x)$. Legyenek $a < b$ valós számok, és tegyük fel, hogy

- az $I = (a, b)$ intervallum összes pontja árnyékpont, továbbá
- a és b nem árnyékpont.

Bizonyítsuk be, hogy

a) minden $x \in (a, b)$ pontra $f(x) \le f(b)$;
b) $f(a) = f(b)$.

3. Legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_{12}$ valós számok az $(1, 12)$ intervallumból. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan különböző i, j, k indexek, hogy d_i, d_j és d_k egy hegyesszögű háromszög oldalhosszai.

4. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan n természetes szám van, amelyre az n, $n + 1$ és $n + 2$ számok mindegyike előáll két négyzetszám összegeként.

SEGÍTSÉG: Vö. 0. feladatsor, 1. feladat.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $z_1, \ldots, z_n$ komplex számok esetén létezik $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, hogy

$$\left| \sum_{s \in S} z_s \right| \ge \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

SEGÍTSÉG: Honlapon.

6. Döntsük el, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1 + n + n^2} \right)$$

sor konvergens-e. Ha igen, akkor számítsuk ki az összegét.