

6. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Adott öt pont egy gömbfelületen. Mutassuk meg, hogy van olyan zárt félgömbfelület, amely az adott pontok közül legalább négyet tartalmaz.

2. What is the largest integer n for which $n^3 + 100$ is divisible by $n + 10$?

SEGÍTSÉG: Honlapon.

3. Adott egy kommutatív és asszociatív kétváltozós $*$ művelet az S halmazon, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x, y \in S$ elemhez létezik olyan $z \in S$ elem, hogy $x * z = y$. Igazoljuk, hogy ha az $a, b, c \in S$ elemekre fennáll, hogy $a * c = b * c$, akkor $a = b$.

4. Az x és y valós számokat egyenletes eloszlás szerint választjuk a $(0, 1)$ intervallumból (egymástól függetlenül). Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az x/y számhoz legközelebbi egész páros. Válaszunkat $r + s\pi$ alakban adjuk meg, ahol r, s racionális számok.

SEGÍTSÉG: Honlapon.

5. Egy táblázatnak több oszlopa van, mint sora. Néhány mezőbe egy $*$ -ot írunk úgy, hogy minden oszlopba kerüljön legalább egy csillag. Bizonyítsuk be, hogy van olyan csillag, amelynek sorában több csillag szerepel, mint az oszlopában.

6. Legyen n egy pozitív egész. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan a_0, a_1, \dots, a_n pozitív valós számok, amelyekre a

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \dots \pm a_1 x \pm a_0$$

polinomnak n különböző valós gyöke van, bárhogy is előjelezzük az együtthatókat.