

5. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Mutassuk meg, hogy az

$$(1 - x + x^2)e^x$$

függvény $x = 0$ körüli Taylor-sorában minden nemnulla együttható egy olyan racionális szám, amelynek egyszerűsített tört alakjában a számláló 1 vagy prím.

2. Let $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that $f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0$ for all real numbers $x, y,$ and z . Prove that there exists a function $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f(x, y) = g(x) - g(y)$ for all real numbers x and y .

3. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix k -edik hatványa a nullmátrix valamely $k \in \mathbb{N}$ -re. (Az ilyen mátrixokat nilpotens mátrixoknak nevezzük.) Igazoljuk, hogy az $I - A$ mátrix invertálható, ahol I az $n \times n$ -es egységmátrixot jelöli.

4. P egy olyan konvex poliéder a térben, amelynek minden éle ugyanolyan hosszú, és egy adott gömb érinti az összes élt. Továbbá P -nek van páratlan élszámú lapja. Igazoljuk, hogy ekkor P csúcsai egy gömbfelületen vannak.

5. Két játékos felváltva választ elemeket az S_n szimmetrikus csoportból, ahol $n > 1$ rögzített. Minden lépésben egy még nem kiválasztott elemet választ a soron következő játékos. A játék akkor ér véget, amikor a kiválasztott elemek már generálják S_n -et. Az veszít, aki az utolsó elemet választotta. Az első vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája?

6. Mutassuk meg, hogy végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ kitevőre 2^n számjegyeinek összege nagyobb, mint 2^{n+1} számjegyeinek összege.