

1. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Veszünk két egymást követő természetes számot, és az egyiket felírjuk András, a másikat Béla homlokára. (Mindketten csak a másik homlokán lévő számot látják, a sajátjukét nem.) Mindkét játékos a jobb vagy bal kezének felemelésével jelezhet a másik játékosnak (kötelező felemelniük pontosan az egyik kezüket, egyszerre). A cél az, hogy mindketten kitálják a homlokukon lévő számot a másik jelzéséből. Előre megbeszélhetnek egy stratégiát, tudva, hogy két egymást követő természetes szám kerül majd a homlokukra. Adjunk meg egy működő stratégiát.

2. Jelölje \mathbb{E}^2 az euklideszi síkot (a pontjainak halmazát). Az $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a sík minden $ABCD$ négyzetére $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Következik-e ebből, hogy f azonosan 0?

3. Let k be a positive integer. Find all polynomials P with real coefficients such that $P(P(x)) = P(x)^k$.

SEGÍTSÉG: Honlapon.

4. Tegyük fel, hogy az $f: [1, 3] \rightarrow [-1, 1]$ integrálható függvényre $\int_1^3 f(x) dx = 0$. Milyen nagy lehet az $\int_1^3 \frac{f(x)}{x} dx$ integrál értéke?

5. $2n$ diák kitöltött egy tesztet, amin az elérhető pontszámok $0, 1, \dots, 10$. Ezen elérhető pontszámok mindegyike előfordult a diákok eredményei között, és a diákok pontszámainak átlaga $7,4$ lett. Mutassuk meg, hogy a diákokat két n fős csoportra lehet osztani úgy, hogy mindkét csoportban pontosan $7,4$ a pontátlag.

6. Van n darab madzagunk. A madzagok végeit véletlenszerűen összepárosítjuk és az összepárosított végeket összekötjük. (A madzagoknak összesen $2n$ vége van, tehát n párt képzünk, és az egy párba tartozó végeket kötjük össze. Mindegyik párosítás ugyanolyan valószínű.) Határozzuk meg az így kialakult hurkok (záródó darabok) számának várható értékét.