Hatványközepek közötti egyenlőtlenség
(segítség a II/2. feladathoz)

Állítás. Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n > 0$ valós számokra és $r, s \neq 0$ valós kitevőkre fennáll, hogy $r < s$ esetén

$$\left(\frac{a_1^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{a_1^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Továbbá, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = \cdots = a_n$.

Bizonyítás. Lásd Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek (18. oldal), vagy
https://hu.wikipedia.org/wiki/Hatványközepek_közötti_egyenlőtlenség. □

Megjegyzés. A fenti egyenlőtlenség két oldalán szereplő mennyiséget az $a_1, \ldots, a_n$ számok r-edik, illetve s-edik *hatványközepének* nevezzük.
A (-1)-edik, első és második hatványközepek rendre a harmonikus, számtani és négyzetes közepek; így a fenti egyenlőtlenség speciális eseteként adódik e nevezetes közepek közötti ismert egyenlőtlenség.

A hatványközepek közötti egyenlőtlenség ($0 < r < s$ kitevők esetén) felfogható a Hölder-egyenlőtlenség következményeként is (ami pedig a Cauchy–Schwarz általánosítása):

Hölder-egyenlőtlenség. Legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$ valós számok, és $p, q > 1$ olyan valós kitevők, amelyekre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor

$$(*) \qquad x_1 y_1 + \ldots x_n y_n \leq \left(x_1^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(y_1^q + \cdots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Továbbá, egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $x_i^p = \lambda y_i^q$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$-re.

Következmény. Ha $0 < r < s$, akkor

$$\begin{aligned} x_i &:= a_i^r \quad (i = 1, \ldots, n) \\ y_i &:= 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \\ p &:= \frac{s}{r} \\ q &:= \frac{s}{s-r} \end{aligned}$$

választással, rendezés után a hatványközepek közötti egyenlőtlenséget kapjuk $(*)$-ból. □