

11. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Prove that every positive integer has a multiple whose decimal representation involves all ten digits.
2. Given any 1000 points in the plane, show that there is a circle which contains exactly 500 of the points in its interior, and none on its circumference.
3. Van n darab ismeretlen tömegű érménk, amelyekről el szeretnénk dönteni, hogy egyforma tömegűek-e. Ehhez használhatunk egy kétkarú mérleget, de minden mérésnél ugyanannyi érmét kell tennünk a bal serpenyőbe, mint a jobb serpenyőbe. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen stratégiával is dolgozunk, (bizonyos esetekben) legalább $n - 1$ mérésre szükség van.
4. Igazoljuk, hogy az

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

függvényegyenlet minden nemlineáris $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldásának grafikonja sűrű a síkon. (Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja sűrű, ha a sík tetszőleges körlapja tartalmaz $(t, f(t))$ alakú pontot, ahol $t \in \mathbb{R}$.)

MEGJEGYZÉS: A feladatbeli függvényegyenletnek létezik nemlineáris megoldása. (Ezt természetesen nem kell bizonyítani.)

SEGÍTSÉG: Honlapon.

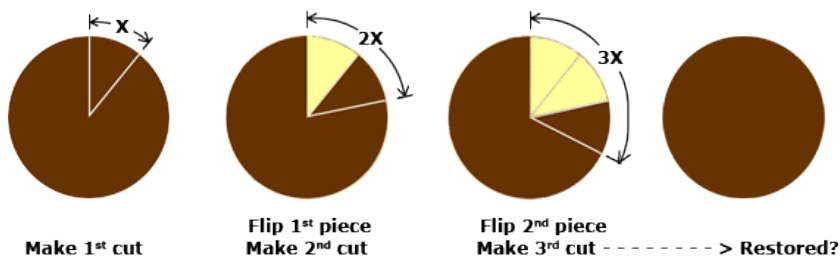
5. Adottak a $v_1, \dots, v_n$ vektorok $\mathbb{R}^d$ -ben, ahol $n \geq 2$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $I \subset \{1, \dots, n\}$ indexhalmaz, hogy

$$4 \left(\sum_{i \in I} v_i \right) \cdot \left(\sum_{i \notin I} v_i \right) \geq \sum_{i \neq j} v_i \cdot v_j,$$

ahol $\cdot$ a skaláris szorzatot jelöli. (És élünk a $\sum_{i \in \emptyset} v_i = \mathbf{0}$ megállapodással.)

6. Van n darab madzagunk. A madzagok végeit véletlenszerűen összepárosítjuk és az összepárosított végeket összekötjük. (A madzagoknak összesen $2n$ vége van, tehát n párt képzünk, és az egy párba tartozó végeket kötjük össze. Mindegyik párosítás ugyanolyan valószínű.) Határozzuk meg az így kialakult hurkok (záródó darabok) számának várható értékét.

- 7.⁺ Adott egy tetszőleges $\alpha \in (0, 2\pi)$ szög. Van egy szokásos henger alakú jégkrémtortánk, melynek teteje csokimázzal van borítva, a többi részén pedig nincs csoki. Vágunk egy α szögű (körcikkkel leírható) szeletet a tortából, majd fejre fordítjuk, és így tesszük vissza a tortába. (A visszarakott szelet hozzáfagy a többi részhez.) Utána továbbhaladunk az óramutató járásával megegyező irányba, és az előző szelettel szomszédosan (azzal érintkezve) ismét kivágunk egy α szögű szeletet, majd megfordítva visszatesszük. És így tovább, ezt az eljárást folytatjuk a megkezdett irányban; minden szelet a megelőzővel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy véges sok lépés után ismét felül lesz az összes csokimáz.



SEGÍTSÉG: Nincs elírva a feladat: akkor is igaz az állítás, ha $\alpha/(2\pi)$ irracionális.