

10. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Egy futó egy 6 km-es távot 30 perc alatt futott le. Mutassuk meg, hogy a futás során valamikor egy 1 km-es szakaszt pontosan 5 perc alatt tett meg.
2. Azt mondjuk, hogy a síkon két rácpont látja egymást, ha az őket összekötő szakaszon nincs más rácpont. Bizonyítsuk be, hogy a sík rácpontjait ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy bármely két olyan pont, amelyek látják egymást, különböző színt kapjanak.
3. Let n be an integer greater than one. Show that $n^4 + 4^n$ is not prime.
4. Keressük meg az összes olyan differenciálható $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén.

5. Adottak a $t_1, \dots, t_n$ pozitív számok. Legyen $a_{ij} = \min\{t_i, t_j\}$, $i, j = 1, \dots, n$. Bizonyítsuk be, hogy az $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mátrix pozitív szemidefinit.

SEGÍTSÉG: Egy kisebb és egy nagy segítség a honlapon.

6. Igazoljuk, hogy a síkon legfeljebb megszámlálható sok páronként diszjunkt „nyolcast” lehet elhelyezni. (Nyolcason egy olyan ponthalmazt értünk, amelyet két - nem feltétlenül ugyanakkora sugarú - kívülről érintkező kör összeragasztásával kapunk.)