

8. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Egy halmazt önzőnek nevezünk, ha a számosságát (elemszámát) tartalmazza elemként. Például a $\{2, 3, 8\}$ halmaz önző. Egy önző halmaz minimális, ha semelyik valódi részhalmaza sem önző. Hány minimális önző részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak?

2. A , B és C olyan nemkollineáris pontok a síkon, melyek mindkét koordinátája egész, továbbá az AB , AC és BC távolságok is egészek. Ezen feltételek mellett határozzuk meg az AB szakasz hosszának legkisebb lehetséges értékét.

3. Let d_n be the determinant of the $n \times n$ matrix whose entries, from left to right and then from top to bottom, are $\cos 1, \cos 2, \dots, \cos n^2$. (For example,

$$d_3 = \begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cos 3 \\ \cos 4 & \cos 5 & \cos 6 \\ \cos 7 & \cos 8 & \cos 9 \end{vmatrix}.$$

The argument of $\cos$ is always in radians, not degrees.) Evaluate $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$.

SEGÍTSÉG: Honlapon.

4. Az $S \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak eleme a 0 és az 1. Továbbá S -re teljesül, hogy véges sok különböző S -beli elem átlaga is mindig S -ben van. Mutassuk meg, hogy S tartalmazza a $[0, 1]$ intervallum összes racionális számát.

5. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Tegyük fel, hogy az $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ függvényre teljesül, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

minden $x, y \in [a, b]$ számpárra. Válasszunk egy tetszőleges $x_1 \in [a, b]$ számot, és az

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$$

rekurzióval definiáljuk az $x_2, x_3, \dots$ számokat. Mutassuk meg, hogy az $(x_n)_{n=1}^\infty$ sorozat az f függvény valamely fixpontjához tart.

6.* Legyenek $x \in [0, 1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$