

7. Feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Van egy cinkelt pénzerménk, amivel p valószínűséggel fejet, $1-p$ valószínűséggel írást dobunk ($p \neq \frac{1}{2}$). Adjunk olyan stratégiát vagy konstrukciót az érme segítségével, amivel az $\frac{1}{2}$ valószínűség szimulálható.
2. Egy szabályos dobókockával n -szer dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 5-tel?
3. Ördögország 666 városa közül némelyek között út vezet (közvetlen). Az ország királya ezen utak közül bizonyosokat parázssal szeretne bevonatni abból a célból, hogy az ott lakók életét még jobban megkeserítse. Ezen kívül az a furcsa szándéka van, hogy pontosan 600 darab Páratlan Pánikhely legyen, azaz olyan város, melyből páratlan sok parázsló út vezet ki. Mutassuk meg, hogy célját elérheti, ráadásul a 600 Páratlan Pánikhelyet tetszőlegesen megválaszthatja, feltéve, hogy Ördögországban bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni az úthálózatán.
4. Alice shuffles an ordinary deck of cards and turns the cards face up one at a time while Bob watches. At any point in this process before the last card is turned up, Bob can guess that the next card is red. Does Bob have a strategy that gives him a probability of success greater than $\frac{1}{2}$?
5. Egy kör alakú teremből k darab ajtó nyílik k darab különböző, villanykapcsolóval ellátott szobába. Mindegyik villanykapcsolónak két állása van (fel és le), továbbá mindegyik szobára igaz, hogy az ő kapcsolójának átállításakor a két szomszéd szobában levő kapcsoló állása is megváltozik. Milyen k számokra igaz, hogy a k különböző kapcsoló tetszőleges állása esetén elérhető, hogy vagy mindegyik kapcsoló fel, vagy mindegyik kapcsoló le legyen kapcsolva?
6. Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. Define a sequence of functions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in the following way:

$$f_0(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Prove that if $f_n(1) = 0$ for all n , then $f(x) \equiv 0$.