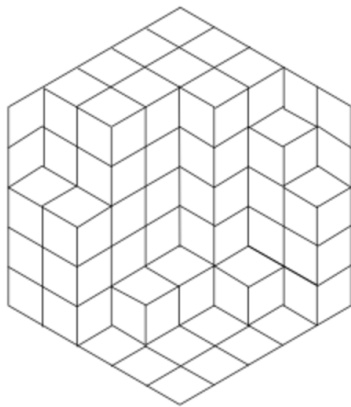


6. feladatsor
MATEKOS KIRÁNDULÁS edition

1.[?] A szabályos háromszögrácsra egy szabályos hatszöget rajzolunk, majd bizonyos szomszédos kisháromszögek összeragasztásával rombuszokkal parkettázzuk a hatszöget az ábrán látható módon. A rombuszparketták háromfélék lehetnek aszerint, hogy hogyan állnak. Bizonyítsuk be, hogy mindhárom típusból ugyanannyi parketta van.



2. A valós egyenes negatív félegyenesére elhelyezünk n pontszerű golyót, a pozitív félegyenesre pedig k darabot. Ezután mindegyik golyó elindul egyenletes sebességgel az origó irányába. A golyók tömege és sebessége (abszolútértékben) megegyezik. Hány ütközés történik a golyók között, ha az ütközések tökéletesen rugalmasak?

3. Egy hercegnő palotájában 17 szoba van egymás mellett egy sorban, melyek egy folyosóról nyílnak. Minden szobának van ajtaja a folyosó felé, továbbá a szomszédos szobák belső ajtóval is össze vannak kötve. A hercegnő minden napját teljes egészében valamelyik szobában tölti, még hozzá az előző napi szobájával szomszédos valamelyik szobában. Egy napon egy külföldi herceg érkezik, aki szeretné megkérni a hercegnő kezét. A hercegnő testőre tájékoztatja a herceget a hercegnő fenti szokásairól, és megengedi a hercegnek, hogy minden nap bekopogjon az egyik szobába. Amennyiben a hercegnőt az ajtó mögött találja, az hozzá megy feleségül; ha nem, a herceg a következő napon újra próbálkozhat. Sajnos a hercegnek csak 30 nap áll rendelkezésre. Meg tudja hódítani ennyi idő alatt a hercegnőt?

4. A $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -beli rácspontokon ugrál egy nyúl. A nyúl percenként ugrik a következő rácspontra, és mindig ugyanazzal a $\mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vektorral mozdul el az aktuális helyéről. Egy vadász le szeretné lőni a nyulat, de soha nem látja, hogy hol van a nyúl, csak azt tudja, hogy a fenti „diszkrét egyenes vonalú egyenletes mozgás” szerint ugrál. (A vadász nem ismeri a $\mathbf{v}$ sebességvektort.) A vadász percenként rálőhet valamelyik rácspontra, és ha a nyúl éppen ott tartózkodik, akkor eltalálja. Igazoljuk, hogy megfelelő stratégiával a vadász előbb-utóbb biztosan eltalálja a nyulat.

5. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan a és b irracionális számok, hogy a^b racionális.

6. Egy ismert fejtörő általánosítása:

Egy faluban mindenkinek a homlokán egy piros vagy kék pötty van. Senki sem látja a saját homlokát, de amint rájön valaki, hogy milyen színű a saját pöttye, megöli magát. A falusiak minden nap délután 3-kor összegyűlnek teázni. Az egyik ilyen teázáson egy idegen látogató bejelent egy nemtriviális dolgot a piros pöttyök számáról. Mutassuk meg, hogy végül mindenki megöli magát. (Nemtriviális alatt olyan tulajdonságot értünk, ami nem mindig igaz egy ilyen lélekszámú faluban, pl. „nemnulla” vagy „páratlan”. Ezzel szemben triviális például az „egész” vagy „nemnegatív” tulajdonság.)

7. Elek a parkban összefutott a királyfival, és megtudta tőle, mitől olyan szomorú. A királyfi kérve kérte a törpéket, hogy hadd legyen övé Hófehérke üvegkoporsója. A törpék azonban próba elé állították a királyfit. Holnap reggel be kell mennie a szobába, és ki kell választania Hófehérke tányérját. Az asztalon egymás mellett 8 egyforma tányér áll majd, a tányérok mellett jobbról vagy balról pedig a kanál, aszerint, hogy gazdája jobb- vagy balkezes. A királyfi persze még azt sem tudta, hogy hányan jobbkezesek. Elek gondolkodott, majd arra kérte a királyfit, hajnalban vigye magával, útközben majd elmondja tervét. Másnap a törpék megengedték, hogy Elek bemehet a próbatétel előtt a szobába, és megmutatják neki a keresett tányért, hogy ellenőrizhesse, jól választott-e a királyfi. A szobában, miután megtudta, melyik Hófehérke tányérja, valamelyik tányér melletti kanalat felemelte és nézegetni kezdte. Amikor a törpék rászóltak, hogy azonnal tegye le, visszatette a kanalat, vagy ugyanoda, ahonnan elvette, vagy a tányér másik oldalára. Ezután bejött a királyfi, és némi tanakodás után határozottan rámutatott Hófehérke tányérjára. Hogyan csinálták?