

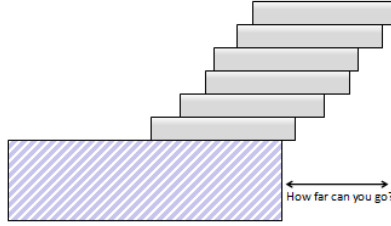
4. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Legyen X és Y két nem feltétlenül független valószínűségi változó. Ismerjük a következő valószínűségeket: $p_1 = P(X = 20)$, $p_2 = P(Y = 20)$, $p_3 = P(\min(X, Y) = 20)$. Fejezzük ki ezek segítségével a $P(\max(X, Y) = 20)$ valószínűséget.

MEGJEGYZÉS: -1 pontért feltehetjük, hogy X és Y is csak véges sok értéket vehet fel.

2. Egyforma, egység hosszú dominókat teszünk egymásra egy asztalon az ábra szerint. Mi az így elérhető legnagyobb vízszintes túlnyúlás az asztal széléhez viszonyítva? A dominótorony pontosan akkor nem dől össze, ha minden D dominóra (és magára az asztallapra) igaz, hogy a D felett elhelyezkedő dominók együttes tömegközéppontjának vízszintes koordinátája a D által kijelölt intervallumba esik.



3. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous decreasing function. Prove that the system

$$\begin{aligned}x &= f(y), \\y &= f(z), \\z &= f(x)\end{aligned}$$

has a unique solution.

4. Legyen $n \geq 1$ pozitív egész, és $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ pozitív egészek. Egy $t_n + 1$ tagú társaság tagjai lejátsszanak néhány sakkipartit úgy, hogy két ember egymással legfeljebb egyszer játszhat. Igazoljuk, hogy teljesülhet egyszerre az alábbi két feltétel:

- (i) A társaság minden egyes tagja által lejátszott partik száma a $t_1, t_2, \dots, t_n$ számok egyike.
- (ii) Minden i -re, ahol $1 \leq i \leq n$, van valaki, aki pontosan t_i sakkipartit játszott le.

5. Legfeljebb hány pont helyezhető az n -dimenziós egységsgömb felszínére úgy, hogy bármely két pont távolsága $\sqrt{2}$ -nél nagyobb legyen?

6.* Tegyük fel, hogy az $a_0, a_1, \dots, a_n$ és $0 < x < 1$ valós számokra fennáll, hogy

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \dots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan $0 < y < 1$ valós szám, amelyre

$$a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = 0.$$