

2. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. If p and $p^2 + 2$ are primes, show that $p^3 + 2$ is prime.

2. Legyen P egy adott (nemelfajuló) poliéder. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy $c(P) > 0$ konstans a következő tulajdonsággal: Ha n gömb lefedi a poliéder felszínét, és a gömbök térfogatainak összege V , akkor $n > c(P)/V^2$.

SEGÍTSÉG: Lásd kiadott segédanyag.

3. Igaz-e, hogy ha az $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény

a) monoton növekvő,

b) monoton csökkenő,

akkor létezik olyan $x \in [0, 1]$, melyre $f(x) = x$?

4. Legyen $p(x)$ egy olyan polinom, amely minden valós x helyen nemnegatív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy valamely k -ra léteznek olyan $f_1(x), \dots, f_k(x)$ polinomok, hogy

$$p(x) = \sum_{j=1}^k (f_j(x))^2.$$

5. Let $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ be a sequence of positive real numbers such that $b_0 = 1$, and for $n \geq 1$, $b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_{n-1}}}$. Calculate

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n.$$

6. Döntsük el, hogy létezik-e olyan folytonosan differenciálható $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) > 0$ és $f'(x) = f(f(x))$.

7.* Egy téglalapot átfedések nélkül „leparkettáztunk” 1 egység széles téglalapokkal úgy, hogy a parketták oldalai párhuzamosak az eredeti téglalap oldalaival. (A parketták különböző méretűek lehetnek, az egyetlen megkötés, hogy mindegyiknek van 1 hosszú oldala.) Bizonyítsuk be, hogy ekkor a leparkettázott téglalap valamelyik oldalhossza egész.

SEGÍTSÉG:

