

1. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Imagine an infinite chessboard that contains a positive integer in each square. If the value of each square is equal to the average of its four neighbors to the north, south, west and east, prove that the values in all the squares are equal.

2. Az alábbi táblázat tetszőleges sorát, oszlopát, vagy valamelyik átlóval párhuzamos „mező-egyenesét” kiválaszthatjuk, és a benne szereplő összes elem előjelét megváltoztatjuk. (A négy sarokelem is átlóval párhuzamos – egyelemű – mezőegyenesnek tekintendő.) Ezt a műveletet többször megismételjük. Bizonyítsuk be, hogy mindig lesz legalább egy -1 a táblázatban.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

3. A szigorúan monoton növekvő $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ függvény teljesíti, hogy $f(f(n)) = 3n$, minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re. Határozzuk meg $f(2017)$ értékét.

4. Egy $\sqrt{2}$ sugarú kört kívülről érint egy 1 sugarú kör. A kisebb körön az érintési ponttal átellenes pontban van egy pontszerű festékpaca. A kisebb kör elkezd gördülni a nagyobb kör kerületén. A gördülés folyamán a festékpaca érintkezéskor összekeveri a másik kört, pontszerű pacákat létrehozva azon is. Az így kialakult pacák is hozhatnak létre később új pacákat, bármelyik körrel bármelyikre. Határozzuk meg, hogy hány festékpaca lesz a nagy körön, miután a kis kör 1000 fordulatot tett meg.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy polinomnak minden gyöke valós, és minden együtthatója ± 1 , akkor a polinom legfeljebb harmadfokú.

6. Legyen $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ egy folytonos függvény, és $x_0 \in [0, 1]$. Bizonyítsuk be, hogy az $x_{n+1} = f(x_n)$ rekurzióval definiált $(x_n)_{n=0}^\infty$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$