Néhány hasznos állítás komplex mátrixok sajátértékeiről

Definíció. Egy A négyzetes mátrix $\mathrm{tr}(A)$-val jelölt *nyomán* a főátlóbeli elemek összegét értjük, vagyis $\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, ha $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

Definíció. A $\lambda \in \mathbb{C}$ szám *sajátértéke* az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixnak, ha van olyan $\mathbf{0}$-tól különböző $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ (oszlop)vektor, amelyre $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Állítás. Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix sajátértékei pontosan a $p_A(x) = |A - xI|$ polinom gyökei. (A p_A polinomot az A mátrix *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.)

Következmény. Mivel egy $n\times n$-es mátrix karakterisztikus polinomja n-edfokú, ezért az algebra alaptétele szerint egy $n\times n$-es komplex mátrixnak n sajátértéke van. Természetesen ez úgy értendő, hogy a karakterisztikus polinom többszörös gyökeit többszörös sajátértékeknek tekintjük. A továbbiakban egy mátrix sajátértékeinek felsorolásánál egy sajátértéket mindig annyiszor tüntetünk fel, amennyi az előbbi értelemben vett (ún. algebrai) multiplicitása.

Tétel. Ha az $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, akkor

a) $$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,$$

b) $$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$

c) valamint tetszőleges $p \in \mathbb{C}[x]$ polinom esetén a $p(A)$ mátrix sajátértékei pontosan a $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$ számok;

d) továbbá, ha A invertálható (vagyis a 0 nem sajátértéke), akkor A^{-1} sajátértékei pontosan a $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ számok.

Megjegyzés. Fontos, hogy a fenti tételben a valós mátrixokra is komplex mátrixként tekintünk, tehát valós mátrixok esetén is figyelembe kell venni a komplex sajátértékeket.

Hogy lehet „megjegyezni” az előző tételt?

- Hasonló mátrixok* nyoma/determinánsa/sajátértékei megegyeznek. Tehát a tételben szereplő lineáris algebrai paraméterek nem változnak, ha az A mátrix helyett egy A-hoz hasonló, kényelmesen kezelhető mátrixra térünk át.
- Minden komplex mátrix hasonló egy felső trianguláris mátrixhoz (lásd Schur-felbontás vagy Jordan-normálalak).
- Trianguláris mátrixokra nyilvánvalóan teljesülnek az a)–b) állítások, mivel egy trianguláris mátrix sajátértékei pontosan a főátlóban álló elemek. (Ebből és az első pontból az is adódik, hogy minden A-hoz hasonló trianguláris mátrix főátlójában A sajátértékei állnak.)
- A c) állításhoz pedig könnyen meggondolható, hogy ha A és U hasonló mátrixok, akkor $p(A)$ és $p(U)$ is hasonlók. Továbbá ha U felső trianguláris (főátlójában A sajátértékeivel), akkor $p(U)$ is az, és főátlójában a tételbeli $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)$ számok állnak (felső trianguláris mátrixok szorzása/összeadása esetén a főátlók megfelelő elemei összeszorzódnak/összeadódnak).
- A d) az előzőekhez hasonlóan adódik a trianguláris esetből.

* Az $n\times n$-es A és B mátrixok hasonlók, ha $A = Q^{-1}BQ$ valamely $n\times n$-es invertálható Q mátrixra. (Másszóval, A és B hasonlók, ha ugyanazon lineáris transzformáció mátrixai alkalmas bázisokban.)

Szimmetrikus valós mátrixok spektráltétele

Spektráltétel. Legyen A egy $n\times n$-es **szimmetrikus** valós mátrix. Ekkor létezik olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *ortonormált* bázis $\mathbb{R}^n$-ben, hogy mindegyik v_i vektor sajátvektora A-nak.

Megjegyzés. Ha a v_i sajátvektorhoz a λ_i sajátérték tartozik ($i = 1, \ldots, n$), akkor az A-hoz tartozó lineáris transzformáció mátrixa a fenti bázisra áttérve a $D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ diagonális mátrix lesz, melynek főátlójában a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ értékek állnak. Tehát A sajátértékei pontosan a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok (multiplicitáshelyesen).

Alternatív alak. Tetszőleges $n\times n$-es A **szimmetrikus** valós mátrixhoz létezik olyan Q *ortogonális* mátrix[†], amelyre

$$Q^{-1}AQ = D,$$

ahol D *diagonális* mátrix (főátlójában A sajátértékeivel).

Fontos. A fenti tétel NEM igaz az általános esetben (a szimmetrikusság feltételt elhagyva), még a sajátalterek ortogonalitása sem. Ott lényegesen komplikáltabb lehet a helyzet; erről a Jordan-normálalak adja a legjobb képet (amiből kiolvasható a sajátalterek dimenziója, és a sajátértékek algebrai multiplicitása is).

[†] A $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix ortogonális, ha $QQ^T = I$ (vagy ekvivalens módon, ha $Q^TQ = I$). Vagyis Q ortogonális, ha sorvektorai ortonormált vektorrendszert (bázist) alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben (vagy ekvivalens módon, ha az oszlopvektoraira teljesül ugyanez).