

10. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. \mathbb{R}^d -ben tekintsük a $[0, n]^d$ kocka egész koordinátájú pontjai által meghatározott rácsot. Hány darab d -dimenziós résztéglatestet tartalmaz ez a “kockarács”? (Szilas László)

2. Döntsük el, hogy létezik-e olyan valós együtthatós $P(x)$ polinom, hogy minden k pozitív egészre

a)
$$P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k+2}{k};$$

b)
$$P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2k+1}.$$

3. Döntsük el, hogy az ábrán látható (négy egységkockából összeragasztott) építőelem 16 példányából összerakható-e egy $4 \times 4 \times 4$ -es kocka.



4. Let n closed half-spaces be given in \mathbb{R}^n such that each half-space contains the origin. Prove that their intersection contains a nonzero vector. (Bogya Norbert)

5. A $\mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$ függvények halmazát jelölje \mathcal{F} . Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ (függvény)sorozatnak van olyan részsorozata, amely pontonként konvergál egy \mathcal{F} -beli függvényhez.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre

$$n! = \prod_{i=1}^n \text{lkk}t\{1, 2, \dots, \lfloor n/i \rfloor\},$$

ahol ‘lkk’ a legkisebb közös többszöröst jelöli.

7. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges számjegysorozatot megadva, létezik olyan n természetes szám, hogy 2^n ezekkel a számjegyekkel kezdődik. (Szilas László)