9. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Határozzuk meg az $f\colon (\mathbb{R}_+)^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

függvény értékkészletét, ahol $(\mathbb{R}_+)^3$ a pozitív valós számhármasok halmaza.

2. Legfeljebb hány racionális pont lehet egy olyan $\mathbb{R}^2$-beli körvonalon, melynek középpontja nem racionális pont? (Racionális pont alatt olyan pontot értünk, amelynek mindkét koordinátája racionális.)

3. Let A, B and C be $n \times n$ real matrices, and suppose that A is invertible. Prove that if $(A-B)C = BA^{-1}$, then $C(A-B) = A^{-1}B$.

4. Az $\{1,\dots,n\}$ halmaz m darab (különböző) részhalmazára teljesül, hogy mindegyik halmaz páratlan elemszámú, és bármely (különböző) kettő metszete páros elemszámú. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $m \leq n$.

Segítség: Honlapon.

5. Egy előadáson 5 matematikus közül mindegyik pontosan kétszer aludt el (egy-egy időintervallumra). Bármely két matematikushoz van olyan időpont, amikor mindketten aludtak. Mutassuk meg, hogy volt olyan időpont, amikor legalább hárman aludtak egyszerre.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha három körnek van közös belső pontja, akkor a körpárok által meghatározott 3 db közös húr egy ponton megy át.

7. Legyen f_1 és f_2 két folytonos $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $x_1, x_2 \in [0,1]$ pontok és olyan $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ számok, hogy $j = 1,2$-re

$$\alpha_1 f_j(x_1) + \alpha_2 f_j(x_2) = \int_0^1 f_j(t)\mathrm{d}t,$$

valamint $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.