## 8. feladatsor

*Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.*

**1.** Határozzuk meg az alábbi sor összegét:

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{9}{4\cdot 5\cdot 6}+\dots.$$

**2.** Let $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a positive, continuously differentiable function. Prove that there exists $\xi\in[0,1]$ such that

$$e^{f'(\xi)}f(0)^{f(\xi)}=f(1)^{f(\xi)}.$$

**3.** Egy $m\times n$ méretű sakktábla szemközti oldalait azonosítjuk („összeragasztjuk"), és így egy tórusz-sakktáblát kapunk. Egy futót helyezünk az egyik mezőre, amely a sakk szabályainak tóruszra történő természetes módosításai szerint léphet. Hány mezőre léphet ez a futó innen egy lépésben?

**4.** Vannak piros és kék golyóink, amelyek a színüktől eltekintve egyformák. Kezdetben beleteszünk egy zsákba egy piros és egy kék golyót. Ezután véletlenszerűen kihúzunk egyet (egyenletes eloszlás szerint), majd a kihúzott golyót és egy vele megegyező színű újat visszateszünk a zsákba. Ezt az eljárást végrehajtjuk még 97-szer, tehát végül 100 golyó lesz a zsákban. Mi annak a valószínűsége, hogy így 50 piros és 50 kék golyót kapunk?

**5.** Egy $n\geq 3$ fős osztály tanulói klubokat alakítanak (fociklubot, táncklubot stb.). A klubok száma $2^{n-1}$, és két különböző klub tagsága soha nem egyezik meg (mint halmaz). Továbbá tudjuk, hogy bármely három klubnak van közös tagja. Igazoljuk, hogy van olyan tanuló az osztályban, aki mindegyik klubnak tagja.

**6.** Legyen $n\geq 2$, és legyenek $A_1,A_2,\dots,A_{n+1}$ olyan pontok az $n$-dimenziós euklideszi térben, amelyek nem esnek egy hipersíkra, és legyen $B$ egy pont szigorúan az $A_1,A_2,\dots,A_{n+1}$ pontok konvex burkának belsejében. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\angle A_iBA_j>90^\circ$ legalább $n$ darab $(i,j)$ párra, ahol $1\leq i<j\leq n+1$.

Segítség: Honlapon.