7. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1.$^-$ Let $n!^{(k)}$ denote the factorial of n k times. For example, $n!^{(3)}$ means $((n!)!)!$. Which is larger, $2016!^{(2017)}$ or $2017!^{(2016)}$?

2. A continuous function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given. Find the integral

$$\int_0^{2016} \frac{f(x)}{f(x) + f(2016 - x)}\, \mathrm{d}x,$$

assuming that the denominator is non-zero for all $x \in [0, 2016]$.

3. $(G, *)$ egy n elemű véges csoport, H egy $n/2$-nél nagyobb elemszámú részhalmaza G-nek. Bizonyítsuk be, hogy bármely $g \in G$ elemhez léteznek olyan $h, k \in H$ elemek, hogy $g = h * k$.

4. Igazoljuk, hogy egy permutációmátrix minden (valós és komplex) sajátértéke 1 abszolútértékű. (A permutációmátrix egy olyan négyzetes mátrix, amelynek minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es szerepel, és az összes többi elem 0.)

Segítség: Honlapon.

5. Tekintsük a következő polinomot:

$$p(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

András és Béla a következő játékot játsszák. A játék során felváltva adják meg az a_i együtthatók értékeit: Minden lépésben az aktuális játékos kiválaszt egy még kitöltetlen a_i együtthatót ($i \in \{0, \ldots, 2015\}$), és egy valós értéket ad neki. András kezd. A játék akkor ér véget, amikor mind a 2016 ismeretlen együttható ki lett töltve. Béla célja az, hogy az így kapott polinom osztható legyen egy előre rögzített $m(x)$ polinommal, András célja pedig ezt megakadályozni.

a) Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha $m(x) = x - 2016$? (1 pont)

b) Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha $m(x) = x^2 + 1$? (1 pont)

6. A térben adott véges sok bolygó, melyek gömb alakúak és azonos méretűek. Mindegyik bolygó felszínén tekintjük azon pontok halmazát, amelyek egyik másik bolygóról sem láthatóak. Igazoljuk, hogy az így kapott alakzatok összterülete megegyezik egy bolygó felszínével.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ egész, akkor $2^n - 1$ nem osztható n-nel.