

6. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Legyen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyre $f(0) = f(1) = 0$, és valamely $a \in (0, 1)$ pontban $f(a) = \sqrt{3}$. Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának létezik két érintője, melyek az x -tengellyel együtt szabályos háromszöget határoznak meg.

2. a) Let u and v be two nilpotent elements in a commutative ring (with or without unity). Prove that $u + v$ is also nilpotent. (An element u is called nilpotent if there exists a positive integer n for which $u^n = 0$.)

b) Show an example of a (non-commutative) ring R and nilpotent elements $u, v \in R$ such that $u + v$ is not nilpotent.

3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan K természetes szám, hogy minden K -nál nagyobb n természetes számra

$$\frac{\tau(n)}{n} < \frac{1}{2016},$$

ahol $\tau(n)$ az n osztóinak számát jelöli.

4. Az adott $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ valós számokra $x_{i+1} - x_i \leq h$ teljesül ($1 \leq i \leq 2n$). Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^n x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

5. Adottak az $s > t$ természetes számok. A $H_1, \dots, H_m \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ halmazokra teljesül, hogy minden $1 \leq i \leq m$ -re $|H_i| = s$, és minden $1 \leq i < j \leq m$ -re $|H_i \cap H_j| = t$. Igazoljuk, hogy ekkor $m \leq n$.

SEGÍTSÉG: Honlapon.

6. Két játékos a következő játékot játssza. Adott egy 1-nél nagyobb, rögzített n természetes szám. A $k = 2$ kezdő számból kiindulva felváltva lépnek, és minden lépésben a soron következő játékosnak le kell cserélnie az aktuális k számot $(k+1)$ -re vagy $(2k)$ -ra. Az veszít, aki n -nél nagyobb számot kénytelen írni. Határozzuk meg (n függvényében), hogy melyik játékosnak van nyerő stratégiája.

7. Az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix elemei nemnegatív valós számok, és

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = n.$$

Bizonyítsuk be, hogy $|\det A| \leq 1$.