

5. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Egy felülről nyitott (hiányzó felső oldalú), téglatest alakú papírdobozt szeretnénk készíteni, amely 1 egység úrtartalmú. Hogyan válasszuk meg a doboz oldalhosszait, ha az oldalakhoz felhasznált papírmennyiséget minimalizálni szeretnénk?

2. Does there exist a monotonic function $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that f assumes every value between 0 and 1 at least twice?

3. Egy n elemű halmaznak hány olyan részhalmaza van, melynek elemszáma 3-mal osztható? Az eredményt *zárt alakban* adjuk meg!

SEGÍTSÉG: A $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$ összeget kell zárt alakra hozni. További segítség a honlapon.

4. A pozitív valós számokból álló $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és nem korlátos, továbbá teljesül, hogy bármely négy egymást követő $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ sorozatelem átlaga is tagja a sorozatnak. Bizonyítsuk be, hogy az a_{n+1}/a_n sorozat konvergens, és adjuk meg a határértékének lehetséges értékeit.

5. Adott n pont a síkon. Bizonyítsuk be, hogy a pontok lefedhetők véges sok zárt körlappal úgy, hogy a körlapok átmérőinek összege legfeljebb n egység, és bármely két körlap távolsága legalább egységnyi. (Megengedjük a 0 sugarú körlapokat is, amelyeket egy pontnak tekintünk.)

6. Konstruáljunk egy olyan $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$ halmazt, amely sűrű $[0, 1] \times [0, 1]$ -ben, továbbá minden függőleges és minden vízszintes egyenes legfeljebb egy pontban metszi A -t.

Jótanácsok a Stanford feladatmegoldó szemináriumáról:

~~Work in groups.~~ Try small cases. Do examples. Look for patterns. Use lots of paper. Talk it over. Choose effective notation. Try the problem with different numbers. Work backwards. Argue by contradiction. Eat pizza. Modify the problem. Generalize. Don't give up after five minutes. Don't be afraid of a little algebra. Sleep on it if need be. Ask.