4. feladatsor

1. Van egy karóránk, amelyen a kismutató és a nagymutató ugyanolyan hosszú. Hány olyan időpont van déltől éjfélig, amikor az órán látottak alapján nem állapítható meg a pontos idő?

2. Páratlan sok katona állomásozik a harctéren úgy, hogy a katonák közötti távolságok páronként különbözők. A katonák parancsba kapják, hogy mindenki figyelje a hozzá legközelebb álló katonát. Mutassuk meg, hogy van olyan katona, akit senki se figyel.

3. Tegyük fel, hogy az n pozitív egészre a 2^n és 5^n hatványok ugyanazzal a számjeggyel kezdődnek (tízes számrendszerben). Bizonyítsuk be, hogy ez a közös kezdő számjegy csak egyféle lehet, és határozzuk meg ezt a számjegyet.

4. Ötven darab pontos karóra van az asztalon (nem feltétlenül egyformák). Az asztal középpontját jelölje O. Igazoljuk, hogy van időpont, amikor az órák nagymutató-végpontjainak O-tól vett távolságösszege nagyobb, mint az órák középpontjainak O-tól vett távolságösszege.

5. Az $S \subseteq [0,1]$ halmaz k darab zárt intervallum uniója. S rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $d \in (0,1]$ számhoz található két olyan pont S-ben, amelyek távolsága d. Mutassuk meg, hogy az S-et alkotó intervallumok összhossza legalább $1/k$.

6. Az $x_1, x_2, \ldots$ pozitív valós számok sorozatára fennáll, hogy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leq 2.$$