

3. feladatsor

1. Egy természetes szám *partícióján* a szám egy pozitív egészekre történő felbontását értjük (a tagok sorrendje nem számít). Például a 4 szám partíciói: 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1. Legyen $p_{\leq k}(n)$ az n szám azon partícióinak száma, melyekben minden tag legfeljebb k . Továbbá legyen $p^{\leq k}(n)$ az n szám azon partícióinak száma, melyek legfeljebb k tagból állnak. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n, k természetes számokra $p_{\leq k}(n) = p^{\leq k}(n)$.

2. Legyen k egy rögzített pozitív egész. Az $\frac{1}{x^k-1}$ függvény n -edik deriváltja $\frac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$ alakú, ahol $P_n(x)$ egy polinom. Határozzuk meg $P_n(1)$ -et.

3. András és Béla lekváros palacsintát sütöttek, és el szeretnék osztani a palacsintát egyetlen egyenes vágással úgy, hogy mindkettejüknek ugyanannyi palacsintatészta és ugyanannyi lekvár jusson. Bizonyítsuk be, hogy mindig van ilyen vágás. (A palacsinta nincs összetekerve. A palacsintatészta és a rajta lévő lekvár is egy konvex kompakt halmaz a síkon.)

4. Az x_1, x_2, x_3, \dots számokat véletlenül választjuk a $[0, 1]$ intervallumból egyenletes eloszlás szerint (egymástól függetlenül). Legyen N a legkisebb olyan természetes szám, amelyre $x_1 + x_2 + \dots + x_N > 1$. Igazoljuk, hogy az N véletlen változó várható értéke e .

5. Igazoljuk, hogy ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényre az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ integrál létezik, akkor az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \frac{1}{x}) dx$ integrál is létezik, és ez a két integrál egyenlő.

6. Van $2n$ kártyánk. Egy keverés után a kártyák aktuális $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sorrendje az $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ sorrendre változik. Határozzuk meg az összes olyan $2n$ pakliméretet, amelyre 8 keverés után visszaáll a kiinduló sorrend.

7. Legyen $P(x)$ egy 2016-odfokú egész együtthatós polinom, és legyenek $x_1, x_2, \dots, x_{2016}$ különböző egész számok. Bizonyítsuk be, hogy a

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \dots, \quad P(x_{2016}) = x_1$$

egyenlőségek nem teljesülhetnek egyszerre.