## 2. feladatsor

**1.** Tekintsük a következő két 3×3-as előjeltáblázatot:

$$\begin{matrix} - & + & - \\ + & + & - \\ - & - & + \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} - & - & + \\ + & - & - \\ - & - & + \end{matrix}$$

A bal oldali táblázatból meg szeretnénk kapni a jobb oldali táblázatot. Egy lépésben az aktuális táblázat valamely sorát vagy oszlopát kiválasztjuk, és az ott szereplő előjeleket az ellenkezőjére változtatjuk. Ilyen lépésekkel elérhető-e a jobb oldali állapot?
Feladaton kívül: Hogyan oldanánk meg a feladatot számítógéppel, ha nem akarunk trükkös megoldásokon gondolkodni?

**2.** Egy cinkelt érmén a fej kimenetel valószínűsége $p$. Ezt az érmét feldobjuk $n$-szer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy páros sok fejet kapunk?

**3.** $A$ egy $n \times n$-es szimmetrikus valós mátrix, melynek minden eleme egész. $A$ teljesíti az

$$A^2 + A - 2I = J$$

egyenletet, ahol $J$ a csupa 1 elemekből álló $n \times n$-es mátrix, $I$ pedig az $n \times n$-es egységmátrix. Továbbá az $(1, 1, \dots, 1)^T$ vektor sajátvektora $A$-nak. Mutassuk meg, hogy $A$ összes sajátértéke egész.

**4.** Hozzuk zárt alakra a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ kifejezést.
Segítség: Honlapon, több részletben. (Anélkül elég nehéz a feladat.)

**5.** Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n^2+1)(n^2+4)(n^2+9)\dots(n^2+(2n)^2)}}{n^4}.$$

**6.** Egy körben adott $k$ darab körcikk. Mindegyik körcikk középponti szöge legfeljebb $\frac{\pi}{k^2-k+1}$. A $k$ darab körcikk feketére van festve, míg a kör maradék része fehér. Bizonyítsuk be, hogy a kör elforgatható úgy, hogy minden fekete körcikk eredetileg fehér területre kerüljön.