1. feladatsor

1.$^?$ Egy téglalapról tudjuk, hogy lefedhető 25 db 2 egység sugarú körrel. Szükségképpen lefedhető-e a téglalap 100 db 1 egység sugarú körrel?

2. Az $S \subseteq \mathbb{R}$ halmaz zárt a szorzásra (tehát ha $s_1, s_2 \in S$, akkor $s_1 s_2 \in S$). Legyen A és B két olyan diszjunkt részhalmaza S-nek, melyek uniója S. Tegyük fel, hogy A bármely *három* (nem feltétlenül különböző) elemének szorzata mindig A-ban van, és ez a tulajdonság analóg módon B-re is fennáll. Mutassuk meg, hogy ekkor A vagy B zárt a szorzásra.

3. Melyik nagyobb, és miért:

$$\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \quad \text{vagy} \quad \frac{3}{2}\pi?$$

Segítség: Honlapon. (De célszerű először segítség nélkül próbálkozni.)

4. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok mindegyike $+1$ vagy -1, és $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 = 0$, akkor n osztható 4-gyel.

5. Az

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

pozitív egészekből álló (jobbra és lefelé) végtelen táblázatra teljesül, hogy minden pozitív egész szám pontosan nyolcszor szerepel benne. Igazoljuk, hogy ekkor valamely $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ indexpárra $a_{m,n} > mn$.

6. Döntsük el, hogy léteznek-e olyan a, b, c, d polinomok, amelyekre

$$1 + xy + x^2y^2 = a(x)b(y) + c(x)d(y).$$

7. A tanári asztalon egy kétkarú mérleg van. A serpenyőkben súlyok vannak, és mindegyik súlyon néhány (legalább egy) diákunk neve szerepel. Jelenleg a mérleg jobbra billen. Amikor egy diákunk belép a terembe, a nevét tartalmazó összes súlyt átrakja az ellentétes oldali serpenyőbe. Igazoljuk, hogy ki tudjuk jelölni diákjaink egy csoportját úgy, hogy őket egyesével a terembe hívva a mérleg végül balra billenjen a súlyáthelyezések után.