

NÉHÁNY HASZNOS ÁLLÍTÁS KOMPLEX MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEIRŐL

DEFINÍCIÓ. Egy A négyzetes mátrix $\text{tr}(A)$ -val jelölt *nyomán* a főátlóbeli elemek összegét értjük, vagyis $\text{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, ha $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

DEFINÍCIÓ. A $\lambda \in \mathbb{C}$ szám *sajátértéke* az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixnak, ha van olyan $\mathbf{0}$ -tól különböző $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ (oszlop)vektor, amelyre $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

ÁLLÍTÁS. Egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix sajátértékei pontosan a $p_A(x) = |A - xI|$ polinom gyökei. (A p_A polinomot az A mátrix *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.)

KÖVETKEZMÉNY. Mivel egy $n \times n$ -es mátrix karakterisztikus polinomja n -edfokú, ezért az algebra alaptétele szerint egy $n \times n$ -es komplex mátrixnak n sajátértéke van. Természetesen ez úgy értendő, hogy a karakterisztikus polinom többszörös gyökeit többszörös sajátértékeknek tekintjük. A továbbiakban egy mátrix sajátértékeinek felsorolásánál egy sajátértéket mindig annyiszor tüntetünk fel, amennyi az előbbi értelemben vett (ún. algebrai) multiplicitása.

TÉTEL. Ha az $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, akkor

- a) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$,
- b) $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$,
- c) továbbá tetszőleges $p \in \mathbb{C}[x]$ polinom esetén a $p(A)$ mátrix sajátértékei pontosan a $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)$ számok.

MEGJEGYZÉS. Fontos, hogy a fenti tételben a valós mátrixokra is komplex mátrixként tekintünk, tehát valós mátrixok esetén is figyelembe kell venni a komplex sajátértékeket.

Hogy lehet „megjegyezni” az előző tételt?

- Hasonló mátrixok* nyoma/determinánusa/sajátértékei megegyeznek. Tehát a tételben szereplő lineáris algebrai paraméterek nem változnak, ha az A mátrix helyett egy A -hoz hasonló, kényelmesen kezelhető mátrixra térünk át.
- Minden komplex mátrix hasonló egy felső trianguláris mátrixhoz (lásd Schur-felbontás vagy Jordan-normálalak).
- Trianguláris mátrixokra nyilvánvalóan teljesülnek az a)–b) állítások, mivel egy trianguláris mátrix sajátértékei pontosan a főátlóban álló elemek. (Ebből és az első pontból az is adódik, hogy minden A -hoz hasonló trianguláris mátrix főátlójában A sajátértékei állnak.)
- A c) állításhoz pedig könnyen meggondolható, hogy ha A és U hasonló mátrixok, akkor $p(A)$ és $p(U)$ is hasonló. Továbbá ha U felső trianguláris (főátlójában A sajátértékeivel), akkor $p(U)$ is az, és főátlójában a tételbeli $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$ számok állnak (felső trianguláris mátrixok szorzása/összeadása esetén a főátlók megfelelő elemei össze-szoródnak/összeadódnak).

* Az $n \times n$ -es A és B mátrixok hasonlóak, ha $A = Q^{-1}BQ$ valamely $n \times n$ -es invertálható Q mátrixra. (Másszóval, A és B hasonlóak, ha ugyanazon lineáris transzformáció mátrixai alkalmas bázisokban.)