

## 12. feladatsor

1. Az  $S \subseteq \mathbb{R}$  halmaz zárt a szorzásra (tehát ha  $s_1, s_2 \in S$ , akkor  $s_1 s_2 \in S$ ). Legyen  $A$  és  $B$  két olyan diszjunkt részhalmaza  $S$ -nek, melyek uniója  $S$ . Tegyük fel, hogy  $A$  bármely *három* (nem feltétlenül különböző) elemének szorzata mindig  $A$ -ban van, és ez a tulajdonság analóg módon  $B$ -re is fennáll. Mutassuk meg, hogy ekkor  $A$  vagy  $B$  zárt a szorzásra.

2. Melyik nagyobb, és miért:

$$\int_0^\pi e^{\sin^2 x} dx \quad \text{vagy} \quad \frac{3}{2}\pi?$$

SEGÍTSÉG: Honlapon.

3. Páratlan sok katona állomásozik a harctéren úgy, hogy a katonák közötti távolságok páronként különbözők. A katonák parancsba kapják, hogy mindenki figyelje a hozzá legközelebb álló katonát. Mutassuk meg, hogy van olyan katona, akit senki se figyel.

4. Az  $S \subseteq \mathbb{R}$  halmaznak eleme a 0 és az 1. Továbbá  $S$ -re teljesül, hogy véges sok különböző  $S$ -beli elem átlaga is mindig  $S$ -ben van. Mutassuk meg, hogy  $S$  tartalmazza a  $[0, 1]$  intervallum összes racionális számát.

5. A tanári asztalon egy kétkarú mérleg van. A serpenyőkben súlyok vannak, és mindegyik súlyon néhány (legalább egy) diákunk neve szerepel. Jelenleg a mérleg jobbra billen. Amikor egy diákunk belép a terembe, a nevét tartalmazó összes súlyt átrakja az ellentétes oldali serpenyőbe. Igazoljuk, hogy ki tudjuk jelölni diákjaink egy csoportját úgy, hogy őket egyesével a terembe hívva a mérleg végül balra billenjen a súlyáthelyezések után.

SEGÍTSÉG: Honlapon.