

11. feladatsor

MATEKOS KIRÁNDULÁS edition

1. Rómeó és Júlia az interneten ismerkedtek meg, és hamar szerelembe estek. Rómeó az eljegyzési gyűrűt postán akarja elküldeni Júliának. A probléma az, hogy a postáról közismert, hogy minden küldeményt ellopnak, kivéve, ha a küldemény egy lelakatolt ládikóba van zárva. Mindkettejüknél van sok ládikó és lakat, de sajnos egyik félnek sincs kulcsa a másik félnél lévő lakatokhoz. Hogyan tudja Rómeó a gyűrűt mégis eljuttatni Júliához?

2. a) Előttünk van 10 zsák pénzérme, mindegyik zsákban 2016 érmével. Az egyik zsák csupa hamis érmét tartalmaz, a többi valódit. Tudjuk, hogy a valódi érme tömege 1 g, a hamisítványoké 1,1 g. Van egy (egykarú) pontos digitális mérlegünk. Hogyan tudjuk egy méréssel megtalálni a hamis érmét tartalmazó zsákot?

b) Mi a helyzet, ha több zsák hamis pénzérme is lehet?

3. Két testvér a sakkparti előtt sorsolással szeretné eldönteni, hogy melyikük legyen a világos. Csak egy cinkelt pénzerméjük van. Hogyan tudnak mégis igazságosan sorsolni, azaz úgy, hogy mindkettejüknek 50% esélye legyen?

4. (Egy lépés a Banach–Tarski-paradoxon felé.) Adjunk meg a síkon olyan \mathcal{P} ponthalmazt és ϕ forgatást, hogy a \mathcal{P} ponthalmaz $\phi(\mathcal{P})$ elforgatottja *valódi* részhalmaza legyen \mathcal{P} -nek.

5. Egy börtönben 100 rab raboskodik. Minden rab homlokára egy 1 és 100 közötti (egész) számot írnak. (A kiosztott számok között lehetnek egyformák.) Mindenki látja a többiek számait, csak a sajátját nem. A raboknak meg kell tippelniük a homlokukon lévő számot (egymástól függetlenül, a többiek tippjeit nem hallva). Ha senki sem találja el a saját számát, akkor kivégzik őket. Ezeket a szabályokat előre tudják, és a számok kiosztása előtt még megállapodhatnak egy stratégiában. Adjunk stratégiát, amellyel garantáltan lesz jó tipp.

6. Szegeden megjelentek a földönkívüliek, akik megszólalásig hasonlítanak az emberekre. Fel-sorakoztatnak elénk néhány szegedit, akikről már kiderítették, hogy közöttük több a földön-kívüli, mint az ember. Ezután egyesével megkérdezzük mindenkit, hogy hány földönkívüli áll előttük a sorban. Szegeden mindenki igazat mond, de csak a földönkívüliek ismerik fel teljes bizonyossággal a többi földönkívülit, így a földönkívüliek mindig pontos számot mondanak, az emberek pedig tévedhetnek. A kapott válaszok alapján találjunk egy földönkívülit.