10. feladatsor

1.$^-$ A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ négyzetrács pontjait pirossal és kékkel színezzük. Igazoljuk, hogy lesz olyan rácstéglalap, amelynek minden csúcsa ugyanolyan színű.

2. Határozzuk meg az $f\colon (\mathbb{R}_+)^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

függvény értékkészletét, ahol $(\mathbb{R}_+)^3$ a pozitív valós számhármasok halmaza.

3. Adott egy A pozitív valós szám. Mik a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ összeg lehetséges értékei, ha $x_0, x_1, x_2, \dots$ olyan pozitív valós számok lehetnek, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$?

4. Határozzuk meg a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es mátrix sajátértékeit.

5. Az x és y valós számokat egyenletes eloszlás szerint választjuk a $(0,1)$ intervallumból (egymástól függetlenül). Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az x/y számhoz legközelebbi egész páros. Válaszunkat $r + s\pi$ alakban adjuk meg, ahol r, s racionális számok.

6. Legyen X egy halmaz, és jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát. A $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ leképezés rendelkezik a tulajdonsággal, hogy X bármely két diszjunkt A, B részhalmazára $\mu(A \cup B) = \mu(A) \cup \mu(B)$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $F \subseteq X$, amelyre $\mu(F) = F$.

7. Határozzuk meg, hogy mely valós x-ekre konvergens az alábbi sor, és ezekre az x-ekre számítsuk ki az összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ 1\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + \dots + n\cdot k_n = n}} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} x^{k_1+\dots+k_n} \right).$$