9. feladatsor

1. a) Egy szabályos pénzérmét feldobunk n-szer. A kapott dobássorozatot a fejek és írások „homogén” intervallumokra osztják, például ($n = 8$ esetén) a `FIFFFIIF` dobássorozatnak öt intervalluma van: `F`, `I`, `FFF`, `II`, `F`. Határozzuk meg az intervallumok számának várható értékét.

b) Mi lesz a várható érték, ha cinkelt érmét dobálunk, amellyel a fej dobás valószínűsége p?

2. 24 különböző értékű pénzérme van lerakva az asztalra egy sorban. Két játékos játszik, akik felváltva vesznek el egy-egy pénzérmét. A szabály az, hogy mindig a széléről vehetnek csak. Mutassuk meg, hogy a kezdő játékos fel tudja venni az érmék értékének legalább a felét.

3. Rakjunk le a síkra rendre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ sugarú diszjunkt (nyílt) körlapokat úgy, hogy a középpontok sorozata konvergens legyen.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $z_1, \ldots, z_n$ komplex számok esetén létezik $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, hogy

$$\left| \sum_{s \in S} z_s \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Segítség: Egy origón átmenő alkalmas egyenes egy oldalára eső z_i számok megfelelőek lesznek. „Átlagoljunk”.

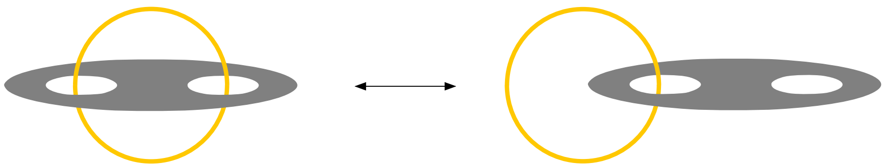
5. Konstruáljunk olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely pontosan az irracionális helyeken folytonos.
Megjegyzés: Nincs olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely pontosan a racionális helyeken folytonos.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ egész, akkor $2^n - 1$ nem osztható n-nel.

7.$^+$ Bele lehet-e tenni egy téglatestet egy kisebb összélhosszú téglatestbe?

Versenyen kívül:

8. Adott egy vékony gumilap két lyukkal és egy fémkarika a bal oldali ábrán látható elrendezésben. Igazoljuk, hogy a gumi elszakítása nélkül elérhető a jobb oldali állapot! (A gumi ideális: tetszőlegesen nyújtható és összenyomható.)



Megoldás: Honlapom → Kedvenc feladataim (15. feladat)