8. feladatsor

1.$^-$ Legyen $0 < a < b$. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\mathrm{d}x \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

2.$^-$ Az egész együtthatós, n-edfokú $p(x)$ polinom $2n+1$ különböző egész helyen vesz fel prím értéket. Bizonyítsuk be, hogy $p(x)$ irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

3. Legyen n páros szám. Egy $n\times n$-es négyzetrács mezőibe beírjuk a számokat 1-től n^2-ig a természetes sorrendben: az i-edik sor elemei balról jobbra haladva

$$(i-1)n+1, (i-1)n+2, \dots, (i-1)n+n.$$

Majd a négyzetrács mezőit pirosra és kékre színezzük úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a mezők fele legyen piros. Igazoljuk, hogy a piros mezőkbe írt számok összege megegyezik a kék mezőkbe írt számok összegével.

4. Az $S \subset \mathbb{R}$ végtelen halmaz minden $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ véges részhalmazára teljesül, hogy $|s_1 + s_2 + \dots + s_k| < 1$. Mutassuk meg, hogy S megszámlálható.

5. Egy konvex poliéder minden élét irányítjuk (azaz minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget). Irányításunk olyan, hogy minden csúcsba vezet be nyíl, és minden csúcsból indul ki nyíl. Igazoljuk, hogy ekkor a poliédernek van olyan lapja, melynek oldalain a nyilak a lap kerületének valamely körüljárása szerint egyazon irányba mutatnak.

6. Számítsuk ki az 1 sugarú körbe írt szabályos n-szög csúcsai által meghatározott $n(n-1)/2$ szakasz hosszának szorzatát (tehát az átlók és az oldalak hosszainak szorzatát).

7. Egy egységkörlapon adott 2016 pont: $P_1, \dots, P_{2016}$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan P pont az egységkörlapon, amelyre

$$\sum_{i=1}^{2016} |PP_i| \geq 2016,$$

ahol $|PP_i|$ a P pont P_i-től vett távolságát jelöli.

8. Legyen $n \geq 2$ egész. Bizonyítsuk be, hogy $\sum \frac{1}{pq} = 1/2$, ahol az összegezés az összes olyan $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ páron fut végig, ahol p, q relatív prímek, és teljesítik, hogy $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$.

9.$^+$ Legyen f_1 és f_2 két folytonos $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvény. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $x_1, x_2 \in [0,1]$ pontok és olyan $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ számok, hogy $j = 1, 2$-re

$$\alpha_1 f_j(x_1) + \alpha_2 f_j(x_2) = \int_0^1 f_j(t)\mathrm{d}t,$$

valamint $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

10.$^+$ A $(G, \cdot)$ véges csoport rendje n. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor négyzetelem G összes eleme, ha n páratlan. (Egy $g \in G$ elem négyzetelem, ha van olyan $h \in G$ elem, hogy $h^2 = g$.)