

7. feladatsor

1. Legyen $a > 0$ és $f(x)$ egy folytonos függvény a $[0, a]$ intervallumon, amelyre teljesül, hogy $f(x) > 0$ és $f(x)f(a-x) = 1$ minden $x \in [0, a]$ -ra. Számítsuk ki az

$$\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$$

integrált.

2. Egy táblára fel van írva a 2016 jegyű 999...999 szám. Minden percben letörölünk egy táblán látható számot, a letörölt számot két (egész) tényező szorzatára bontjuk, majd e két tényezőt (egymástól függetlenül) csökkentjük vagy növeljük 2-vel, és az így kapott két számot felírjuk a táblára. Lehetséges-e, hogy valamikor a táblán lévő összes szám a 9 lesz?

3. Legyenek d_1, d_2, \dots, d_{12} valós számok az $(1, 12)$ intervallumból. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan különböző i, j, k indexek, hogy d_i, d_j és d_k egy hegyesszögű háromszög oldalhosszai.

4. A tér pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy valamely színosztály pontjai között az összes lehetséges távolság előfordul.

5. Egy kör kerületén véletlenül választunk n pontot (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül). Mi annak a valószínűsége, hogy ezen pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját?

6. H egy olyan $n \times n$ -es mátrix, melynek minden eleme ± 1 . Továbbá teljesül, hogy H sorvektorai páronként merőlegesek. Mutassuk meg, hogy ha H egy $a \times b$ méretű részmatrixának összes eleme 1, akkor $ab \leq n$.