6. feladatsor

1.$^{-}$ Mutassuk meg, hogy minden (pozitív egész) összetett szám előáll $xy+xz+yz+1$ alakban alkalmas x, y, z pozitív egész számokra.

2. Határozzuk meg az
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$$
szám egészrészét.

3. Adott egy $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amely differenciálható $\mathbb{R}$-en. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x\in[0,1]$, hogy
$$\frac{4}{\pi}(f(1)-f(0))=(1+x^2)f'(x).$$

4. A sík adott két pontját szeretnénk összekötni egyenes szakasszal. Mutassuk meg, hogy ez akkor is megtehető, ha a rendelkezésre álló vonalzónk jóval rövidebb, mint a két pont távolsága (és körzőnk sincs).
Segítség: Használjuk a Desargues-tételt.

5. Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

6. András és Béla ismét játszanak: Felváltva vesznek el kavicsokat egy kezdetben n kavicsot tartalmazó kupacból. Minden lépésben a soron következő játékos által elvett kavicsok száma egy prímszámnál 1-gyel kisebb szám kell legyen (tehát a játékos által elvehető mennyiségek: $1, 2, 4, 6, 10, \dots$). Az a játékos nyer, aki az utolsó kavicsot vette el. András kezd. Mutassuk meg, hogy végtelen sok n-re Bélának van nyerő stratégiája.

7. Létezik-e olyan bijektív $\pi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, hogy
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(n)}{n^2}<\infty?$$

8. Legyen $p\in\mathbb{R}[x]$ egy tetszőleges valós polinom. Mutassuk meg, hogy létezik olyan nemnulla $q\in\mathbb{R}[x]$ polinom, hogy a pq polinomban x^k együtthatója 0 minden nem-prím k-ra.