

5. feladatsor

1. Mutassuk meg, hogy az

$$(1 - x + x^2)e^x$$

függvény $x = 0$ körüli Taylor-sorában minden nemnulla együttható egy olyan racionális szám, amelynek egyszerűsített tört alakjában a számláló 1 vagy prím.

2. Legfeljebb hány racionális pont lehet egy olyan \mathbb{R}^2 -beli körvonalon, melynek középpontja nem racionális pont? (Racionális pont alatt olyan pontot értünk, amelynek mindkét koordinátája racionális.)

3. Képzeljünk el egy végtelen sakktáblát, amelynek sorai és oszlopai a pozitív egészekkel vannak indexelve. Ki lehet-e tölteni a sakktábla celláit pozitív racionális számokkal úgy, hogy minden pozitív racionális számot pontosan egyszer használunk fel, és a tábla minden sorában és oszlopában a számok összege véges?

4. Egy $\sqrt{2}$ sugarú kört kívülről érint egy 1 sugarú kör. A kisebb körön az érintési ponttal átellenes pontban van egy pontszerű festékpaca. A kisebb kör elkezd gördülni a nagyobb kör kerületén. A gördülés folyamán a festékpaca érintkezéskor összekeni a másik kört, pontszerű pacákat létrehozva azon is. Az így kialakult pacák is hozhatnak létre később új pacákat, bármelyik körről bármelyikre. Határozzuk meg, hogy hány festékpaca lesz a nagy körön, miután a kis kör 1000 fordulatot tett meg.

5. Az a, b, c komplex számokra teljesül, hogy $a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

6. Egy gömb alakú bolygó középpontja $(0, 0, 0)$, sugara 20. A bolygó felszínének (x, y, z) pontjában a hőmérséklet $T(x, y, z) = (x + y)^2 + (y - z)^2$ fok. Határozzuk meg a bolygó felszínének átlaghőmérsékletét.

7. Van n darab cinkelt pénzérménk. Az i -edik érmén a fej dobásának valószínűsége $1/(2i + 1)$, a többi érmefeldobástól függetlenül ($i = 1, \dots, n$). Mindegyik érmét feldobjuk egyszer. Mi annak a valószínűsége, hogy páratlan sok fejet kapunk?

8. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre

$$n! = \prod_{i=1}^n \text{lkk}t\{1, 2, \dots, \lfloor n/i \rfloor\},$$

ahol 'lkk' a legkisebb közös többszöröst jelöli.