4. feladatsor

1.$^-$ Le lehet-e fedni a síkot véges sok parabolalemezzel?

2. Igazoljuk, hogy létezik 2016 olyan egymást követő természetes szám, hogy mindegyik oszható egy (1-nél nagyobb) köbszámmal.

3. Jelölje $r(n)$ az $x^2 + y^2 = n$ egyenlet egész megoldásainak számát. Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(0) + r(1) + \cdots + r(n)}{n}$$

határértéket.

4. Keressük meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x.$$

5. Határozzuk meg az összes olyan folytonosan differenciálható $f\colon [0,1] \to (0,\infty)$ függvényt, amelyre $\frac{f(1)}{f(0)} = e$, és

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)^2} + \int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x \le 2.$$

6. Egy táblázatnak több oszlopa van, mint sora. Néhány mezőbe egy $*$-ot írunk úgy, hogy minden oszlopba kerüljön legalább egy csillag. Bizonyítsuk be, hogy van olyan csillag, amelynek sorában több csillag szerepel, mint az oszlopában.

7. Mutassuk meg, hogy végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ kitevőre 2^n számjegyeinek összege nagyobb, mint 2^{n+1} számjegyeinek összege.

8. Legyen $n \ge 2$, és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ olyan pontok az n-dimenziós euklideszi térben, amelyek nem esnek egy hipersíkra, és legyen B egy pont szigorúan az $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ pontok konvex burkának belsejében. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\angle A_iBA_j > 90°$ legalább n darab (i,j) párra, ahol $1 \le i < j \le n+1$.

Segítség: Lásd honlapom.

Versenyen kívül:

9. Egy asztalnál beszélget 3 matematikus hölgy. Szeretnék kideríteni, hogy közülük ki a legidősebb és a legfiatalabb, de úgy, hogy ezen kívül semmi más információt ne szerezhessen egyikük sem. Hogyan tehetik ezt meg, ha annyit sugdolózhatnak, amennyit akarnak?

MEGOLDÁS: Honlapom → Kedvenc feladataim (16. feladat)