3. feladatsor

1.$^-$ Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, hogy $f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=0$ minden x,y,z valós számra. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f(x,y)=g(x)-g(y)$ minden x,y valós számra.

2. Adott egy kommutatív és asszociatív kétváltozós $*$ művelet az S halmazon, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden $x,y \in S$ elemhez létezik olyan $z \in S$ elem, hogy $x*z=y$. Igazoljuk, hogy ha az $a,b,c \in S$ elemekre fennáll, hogy $a*c=b*c$, akkor $a=b$.

3. Adott a síkon n kék és n piros pont általános helyzetben (a $2n$ pont közül semelyik három nincs egyenesen). Mutassuk meg, hogy a kék és piros pontokat össze lehet párosítani úgy, hogy a párokat összekötő szakaszok ne metsszék egymást.

4. Adott egy n-dimenziós kocka. Tekintsük az összes olyan szakaszt, amely a kocka két különböző csúcsát köti össze. Ezek a szakaszok hány különböző metszéspontot határoznak meg (nem számolva a csúcsokat)?

5. Barátunk gondolt egy pozitív egész együtthatós polinomra. Találjuk ki a gondolt polinomot a lehető legkevesebb kérdésből úgy, hogy egy kérdésben rákérdezhetünk a polinom egy általunk választott helyen felvett értékére.

6. Az $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ függvény monoton csökkenő, és $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x\to\infty} xf(x)=0$.

7. Két játékos felváltva választ elemeket az S_n szimmetrikus csoportból, ahol $n>1$ rögzített. Minden lépésben egy még nem kiválasztott elemet választ a soron következő játékos. A játék akkor ér véget, amikor a kiválasztott elemek már generálják S_n-et. Az veszít, aki az utolsó elemet választotta. Az első vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája?

8. Tegyük fel, hogy az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ és $0<x<1$ rögzített valós számokra fennáll, hogy

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \cdots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan $0<y<1$ valós szám, amelyre

$$a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n = 0.$$

Versenyen kívül (2015-ös Schweitzer-feladat):

9. Legyen A véges halmaz és $\to$ olyan binér reláció A-n, hogy bármely $a,b,c \in A$ esetén, ha $a \neq b$, $a \to c$ és $b \to c$, akkor $a \to b$ vagy $b \to a$. Legyen $B \subseteq A$ minimális arra a tulajdonságra nézve, hogy bármely $a \in A \setminus B$ elemhez létezik $b \in B$ úgy, hogy $a \to b$ vagy $b \to a$. Tegyük fel, hogy A-nak legfeljebb k olyan eleme van, hogy közülük semelyik kettő sincs $\to$ relációban. Bizonyítsuk be, hogy B legfeljebb k elemű.