2. feladatsor

1.$^-$ Mutassuk meg, hogy minden pozitív racionális szám felírható (nem feltétlenül különböző) prímszámokból képzett faktoriálisok szorzatainak hányadosaként. Például,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

2.$^-$ Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a sík minden $ABCD$ négyzetére $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Következik-e ebből, hogy f azonosan 0?

3.$^-$ Adott öt pont egy gömbfelületen. Mutassuk meg, hogy van olyan zárt félgömbfelület, amely az adott pontok közül legalább négyet tartalmaz.

4.$^-$ Határozzuk meg az

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

sor összegét.

5. Jelölje S_n az első n prímszám összegét. Bizonyítsuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re van négyzetszám S_n és S_{n+1} között.

6. Döntsük el, hogy a

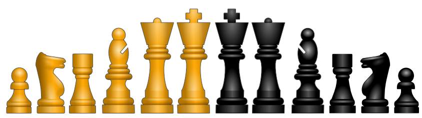
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

sor összege racionális szám-e.

7. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra teljesül, hogy $A^3 = A + I$. Igazoljuk, hogy $\det(A) > 0$.

8. Egy téglalapot átfedések nélkül „leparkettáztunk” 1 egység széles téglalapokkal úgy, hogy a parketták oldalai párhuzamosak az eredeti téglalap oldalaival. (A parketták különböző méretűek lehetnek, az egyetlen megkötés, hogy mindegyiknek van 1 hosszú oldala.) Bizonyítsuk be, hogy ekkor a leparkettázott téglalap valamelyik oldalhossza egész kell legyen.

Segítség:



9. Legyenek $x \in [0, 1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

Versenyen kívül (intuícióellenes feladat):

10. Előttünk van két lezárt boríték; mindkettő egy pozitív valós számot tartalmaz. A számokról semmilyen további információnk nincs azon kívül, hogy különbözők. Az egyik boríték tartalmát megnézhetjük, majd eldönthetjük, hogy ezt a felnyitott borítékot, vagy a másik (lezárt) borítékot választjuk magunknak. Adjunk meg egy olyan stratégiát, amelyet követve 1/2-nél nagyobb valószínűséggel választjuk a nagyobbik számot tartalmazó borítékot magunknak, akármilyen számokat is rejtenek a borítékok.

MEGOLDÁS: Honlapom $\to$ Kedvenc feladataim (5. feladat)