1. feladatsor

1.$^-$ Egy rendezett számhármason a következő operációt hajthatjuk végre: A hármas két tetszőleges a és b elemét lecserélhetjük rendre az $(a+b)/\sqrt{2}$ és $(a-b)/\sqrt{2}$ elemekre. Ilyen operációkkal megkapható-e az $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ hármasból a $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ hármas?

2.$^-$ András és Béla a következő játékot játsszák: Felváltva írják be egy kezdetben üres 2016×2016-os mátrix elemeit. András kezd. A soron következő játékos a mátrix valamelyik kitöltetlen pozíciójába beír egy valós számot. Akkor hirdetnek győztest, amikor minden elem kitöltésre kerül: András nyer, ha a kapott mátrix determinánsa nemnulla, Béla pedig akkor, ha nulla. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

3. Tegyük fel, hogy az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra fennáll, hogy $A + B = AB$. Mutassuk meg, hogy ekkor $AB = BA$ is teljesül.

4. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix k-adik hatványa a nullmátrix valamely $k \in \mathbb{N}$-re. (Az ilyen mátrixokat nilpotens mátrixoknak nevezzük.) Igazoljuk, hogy az $I - A$ mátrix invertálható, ahol I az $n\times n$-es egységmátrixot jelöli.

5. Van-e olyan folytonos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden x pontban teljesül, hogy $f(x)$ pontosan akkor racionális, ha $f(x+1)$ irracionális?

6. Legyen f egy háromszor differenciálható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek legalább öt különböző valós gyöke van.

a) Bizonyítsuk be, hogy f'-nak legalább négy különböző valós gyöke van.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ függvénynek legalább két különböző valós gyöke van.

7. Egy mérhető síkbeli alakzat területe nagyobb mint n (ahol $n \in \mathbb{N}$). Igazoljuk, hogy az alakzatnak van olyan eltoltja, amely legalább $n+1$ rácspontot tartalmaz.

8. Legyen n egy pozitív egész. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, amelyekre a

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1 x \pm a_0$$

polinomnak n különböző valós gyöke van, bárhogy is előjelezzük az együtthatókat.

Versenyen kívül:

9.$^+$ $2n+1$ valós számra teljesül, hogy bárhogy hagyjuk el az egyiket, a megmaradókat két n elemű csoportra lehet osztani úgy, hogy a két csoportban a számok összege megegyezzen. Mutassuk meg, hogy ez csak úgy lehetséges, ha a számok mind egyenlők.

MEGOLDÁS: http://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/eotvos2.pdf