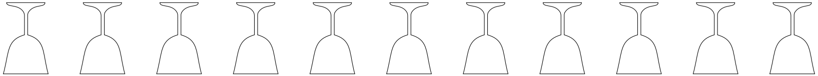
Invariánsok
(a matematikai problémamegoldásban)

Nagy V. Gábor
SZTE Bolyai Intézet

Eötvös Loránd Kollégium, Matematika Műhely
Szeged, 2018. április 27.

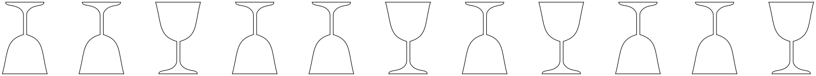
Feladat. 11 pohár van előttünk lefordítva. El tudjuk-e érni, hogy az összes pohár fel legyen fordítva, ha egy lépésben mindig pontosan két poharat fordíthatunk meg?



Feladat. 11 pohár van előttünk lefordítva. El tudjuk-e érni, hogy az összes pohár fel legyen fordítva, ha egy lépésben mindig pontosan két poharat fordíthatunk meg?

Feladat. 11 pohár van előttünk lefordítva. El tudjuk-e érni, hogy az összes pohár fel legyen fordítva, ha egy lépésben mindig pontosan két poharat fordíthatunk meg?

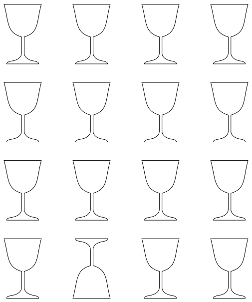
Feladat. 11 pohár van előttünk lefordítva. El tudjuk-e érni, hogy az összes pohár fel legyen fordítva, ha egy lépésben mindig pontosan két poharat fordíthatunk meg?



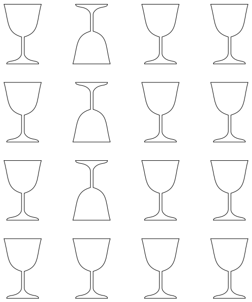
Feladat. 11 pohár van előttünk lefordítva. El tudjuk-e érni, hogy az összes pohár fel legyen fordítva, ha egy lépésben mindig pontosan két poharat fordíthatunk meg?

Megoldás. Nem. A lefordított poharak száma mindig páratlan. (Kezdetben ez teljesül, és minden lépésben ± 2-vel vagy 0-val változik a lefordított poharak száma, tehát a paritás nem változik.) Így nem érhető el, hogy a lefordított poharak száma 0 (páros) legyen. $\square$

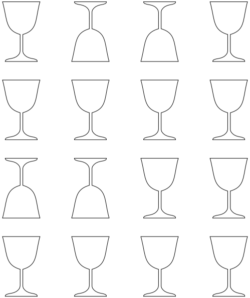
Feladat. Most az ábrán látható módon van elhelyezve 16 pohár. A következőt csinálhatjuk: A 4×4-es elrendezés bármelyik sorát, oszlopát, vagy átlóval párhuzamos „poháregyenesét" kiválaszthatjuk, hogy az ott található poharakat megfordítsuk. Ilyen lépésekkel elérhető-e, hogy az összes pohár fel legyen fordítva?



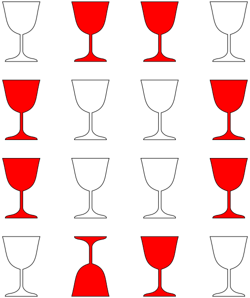
Feladat. Most az ábrán látható módon van elhelyezve 16 pohár. A következőt csinálhatjuk: A 4×4-es elrendezés bármelyik sorát, oszlopát, vagy átlóval párhuzamos „poháregyenesét” kiválaszthatjuk, hogy az ott található poharakat megfordítsuk. Ilyen lépésekkel elérhető-e, hogy az összes pohár fel legyen fordítva?



Feladat. Most az ábrán látható módon van elhelyezve 16 pohár. A következőt csinálhatjuk: A 4×4-es elrendezés bármelyik sorát, oszlopát, vagy átlóval párhuzamos „poháregyenesét” kiválaszthatjuk, hogy az ott található poharakat megfordítsuk. Ilyen lépésekkel elérhető-e, hogy az összes pohár fel legyen fordítva?



Feladat. Most az ábrán látható módon van elhelyezve 16 pohár. A következőt csinálhatjuk: A 4×4-es elrendezés bármelyik sorát, oszlopát, vagy átlóval párhuzamos „poháregyenesét” kiválaszthatjuk, hogy az ott található poharakat megfordítsuk. Ilyen lépésekkel elérhető-e, hogy az összes pohár fel legyen fordítva?



Megoldás. Nem, mert a lefordított piros poharak számának paritása nem változik. □

Feladat. Előttünk van egy 2017 kavicsból álló kupac. Minden lépésben kiválasztunk egy 2-nél több kavicsot tartalmazó kupacot, abból eldobunk egy kavicsot, és a maradékát két kupacra osztjuk valahogy. Elérhető-e ilyen lépésekkel olyan állapot, hogy minden kupacban pontosan 3 kavics van?

Például egy elindulás:

$$2017 \ \to\ 2000; 16 \ \to\ 2000; 12; 3 \ \to\ 1500; 499; 12; 3 \ \to\ \ldots$$

Feladat. Előttünk van egy 2017 kavicsból álló kupac. Minden lépésben kiválasztunk egy 2-nél több kavicsot tartalmazó kupacot, abból eldobunk egy kavicsot, és a maradékát két kupacra osztjuk valahogy. Elérhető-e ilyen lépésekkel olyan állapot, hogy minden kupacban pontosan 3 kavics van?

Például egy elindulás:

$$2017 \rightarrow 2000; 16 \rightarrow 2000; 12; 3 \rightarrow 1500; 499; 12; 3 \rightarrow \dots$$

Megoldás. Nem. Az "összkavicsszám + kupacszám" mennyiség nem változik! És kezdetben ez a mennyiség 2018, míg ha minden kupacban 3 kavics van, akkor ez a mennyiség $3k + k = 4k$, ahol k a kupacok száma. De $4k \neq 2018$, mert 2018 nem osztható 4-gyel, tehát nem érhető el ilyen állapot. □

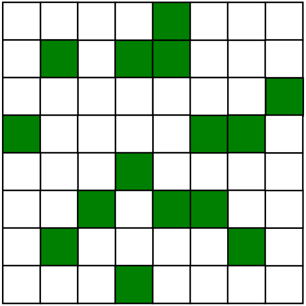
Feladat. Egy szigeten 20 piros, 18 kék és 16 zöld kaméleon él. Amikor két különböző színű kaméleon találkozik, mindketten a harmadik színre változtatják a színüket. Lehetséges-e, hogy bizonyos idő után az összes kaméleon ugyanolyan színű lesz?

Feladat. Egy szigeten 20 piros, 18 kék és 16 zöld kaméleon él. Amikor két különböző színű kaméleon találkozik, mindketten a harmadik színre változtatják a színüket. Lehetséges-e, hogy bizonyos idő után az összes kaméleon ugyanolyan színű lesz?

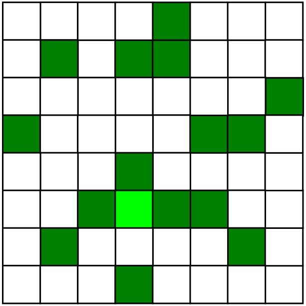
Megoldás. Nem. Ugyanis az a tulajdonság nem változik, hogy a piros, kék és zöld kaméleonok számának 3-as maradékai mind különbözők. Tehát nem fordulhat elő, hogy két színből nulla (ugyanannyi) kaméleon legyen. $\square$

Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!

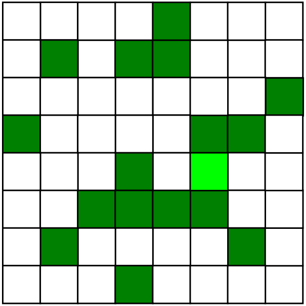
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



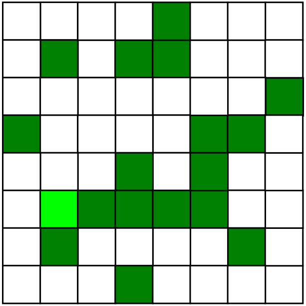
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



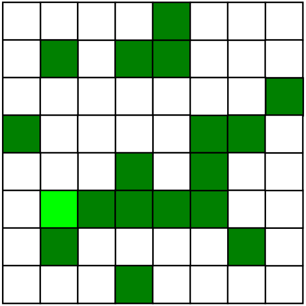
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



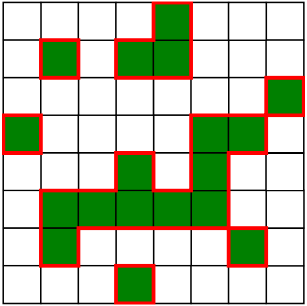
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



Megjegyzés. n kezdeti füves négyzettel (pl. az egyik átló mezőit választva) megoldható a füvesítés.

Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!

Megoldás. A gyepesedési folyamat során a füves területek összkerülete nem nő. Így ha kezdetben legfeljebb $n-1$ füves négyzet van, akkor a kezdeti összkerület legfeljebb $4(n-1)$, ezért ilyenkor nem füvesedhet be az egész tábla, hiszen a teljesen füves állapot $4n$ összkerülete nem érhető el.



Feladat. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Pontosan akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját.

Feladat. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Pontosan akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját.

Megoldás. A „piros-kék'' barátságok száma minden átfestéssel csökken. Így nem fordulhat elő, hogy minden évben történik átfestés (a piros-kék barátságok száma nem mehet negatívba). $\square$

Nehéz feladat. Előttünk van 15 kártya, néhány kupacba szétosztva. Egy lépésben a következőt tesszük: Minden kupacból elveszünk egy kártyát, és az így elvett kártyákból egy új kupacot készítünk. (A kártyaelvétellel az 1-elemű kupacok „eltűnnek".) Bizonyítsuk be, hogy ezen lépés ismételgetésével előbb-utóbb eljutunk egy olyan álláshoz, hogy egy 1-elemű, egy 2-elemű, $\ldots$, és egy 5-elemű kupac van előttünk (valamilyen sorrendben), bármilyen kiinduló konfigurációból is indultunk.

Példa.

$(6,4,3,1,1) \to (5,5,3,2) \to (4,4,4,2,1) \to (5,3,3,3,1) \to (5,4,2,2,2) \to (5,4,3,1,1,1) \to (6,4,3,2) \to (5,4,3,2,1).$

Nehéz feladat. Előttünk van 15 kártya, néhány kupacba szétosztva. Egy lépésben a következőt tesszük: Minden kupacból elveszünk egy kártyát, és az így elvett kártyákból egy új kupacot készítünk. (A kártyaelvétellel az 1-elemű kupacok „eltűnnek".) Bizonyítsuk be, hogy ezen lépés ismételgetésével előbb-utóbb eljutunk egy olyan álláshoz, hogy egy 1-elemű, egy 2-elemű, $\ldots$, és egy 5-elemű kupac van előttünk (valamilyen sorrendben), bármilyen kiinduló konfigurációból is indultunk.

Példa.

$(6,4,3,1,1) \to (5,5,3,2) \to (4,4,4,2,1) \to (5,3,3,3,1) \to (5,4,2,2,2) \to (5,4,3,1,1,1) \to (6,4,3,2) \to (5,4,3,2,1)$.

Megoldás. Internet / Bulgarian Solitaire.

Nehéz feladat. Előttünk van 15 kártya, néhány kupacba szétosztva. Egy lépésben a következőt tesszük: Minden kupacból elveszünk egy kártyát, és az így elvett kártyákból egy új kupacot készítünk. (A kártyaelvétellel az 1-elemű kupacok „eltűnnek".) Bizonyítsuk be, hogy ezen lépés ismételgetésével előbb-utóbb eljutunk egy olyan álláshoz, hogy egy 1-elemű, egy 2-elemű, $\dots$, és egy 5-elemű kupac van előttünk (valamilyen sorrendben), bármilyen kiinduló konfigurációból is indultunk.

Példa.

$$(6,4,3,1,1) \to (5,5,3,2) \to (4,4,4,2,1) \to (5,3,3,3,1) \to (5,4,2,2,2) \to (5,4,3,1,1,1) \to (6,4,3,2) \to (5,4,3,2,1).$$

Megoldás. Internet / Bulgarian Solitaire.

Megjegyzés. A feladat általánosítása is igaz: Bárhogy osztunk szét $1+2+3+\cdots+k$ kártyát kiinduláskor, a fenti lépés ismételgetésével mindig eljutunk a $(k, k-1, \dots, 2, 1)$ elosztáshoz.

Răzvan Gelca, Titu Andreescu: *Putnam and Beyond* (Springer)

Paul Zeitz: *The Art and Craft of Problem Solving* (Wiley)

Loren C. Larson: *Problem Solving Through Problems* (Springer)

Köszönöm a figyelmet!