Lineáris algebrai módszerek a kombinatorikában 2.

Nagy V. Gábor
SZTE Bolyai Intézet

Eötvös Loránd Kollégium, Matematika Műhely
Szeged, 2015. október 22.

Feladat. $2n+1$ valós számra teljesül, hogy bárhogy hagyjuk el az egyiket, a megmaradókat két n elemű csoportra lehet osztani úgy, hogy a két csoportban a számok összege megegyezik.
Állítás: Ez csak úgy lehetséges, ha a számok mind egyenlők.

Feladat. $2n+1$ valós számra teljesül, hogy bárhogy hagyjuk el az egyiket, a megmaradókat két n elemű csoportra lehet osztani úgy, hogy a két csoportban a számok összege megegyezik.
Állítás: Ez csak úgy lehetséges, ha a számok mind egyenlők.

Megoldás. A feladatbeli $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ számok kielégítenek egy

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ & & \ddots & & \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakú homogén lineáris egyenletrendszert, ahol az együttható-mátrix i-edik sorában az i-edik (diagonális) elem 0, ezenkívül még n db 1-es és n db (-1)-es szerepel a sorban, melyek az a_i szám elhagyásához tartozó két csoport elemeit jelölik ki.

Megoldás. A feladatbeli $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ számok kielégítenek egy

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ & & \ddots & & \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakú homogén lineáris egyenletrendszert, ahol az együtthatómátrix i-edik sorában az i-edik (diagonális) elem 0, ezenkívül még n db 1-es és n db (-1)-es szerepel a sorban, melyek az a_i szám elhagyásához tartozó két csoport elemeit jelölik ki.

Ennek az egyenletrendszernek megoldása az $(1, \ldots, 1)$ vektor. Tehát elég megmutatni, hogy a együtthatómátrix rangja $2n$, ami azt jelenti, hogy a megoldásaltér dimenziója $(2n + 1) - 2n = 1$, így az $[(1, \ldots, 1)]$-beli vektorokon kívül nincs más megoldás; ez pedig épp a bizonyítandó.

Cél:

$$\text{A} \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ & & \ddots & & \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)} \text{mátrix rangja } 2n.$$

Cél:

A $\begin{pmatrix} 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ & & \ddots & & \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}$ mátrix rangja $2n$.

Belátjuk, hogy az utolsó sor és oszlop elhagyásával kapott

$$\begin{vmatrix} 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & \pm1 & \pm1 \\ & & \ddots & \\ \pm1 & \pm1 & \pm1 & 0 \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$$

determináns nemnulla.

Cél:

A $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ & & \ddots & & \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}$ mátrix rangja $2n$.

Belátjuk, hogy az utolsó sor és oszlop elhagyásával kapott

$$\begin{vmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ & & \ddots & \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$$

determináns nemnulla. Azt mutatjuk meg, hogy páratlan egész:

$$\begin{vmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \pm 1 \\ & & \ddots & \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2n \pmod 2.$$

A következő tétellel kezdődött a lineáris algebra használata a halmazrendszerek vizsgálatában (Bose, 1948, speciális esetre):

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

A következő tétellel kezdődött a lineáris algebra használata a halmazrendszerek vizsgálatában (Bose, 1948, speciális esetre):

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Bizonyítás. Legyenek a tételben szereplő halmazok $H_1, \ldots, H_m$.
1. eset: *Ha valamelyik* H_i *elemszáma* t, akkor a metszetfeltétel miatt a többi $m-1$ halmaz tartalmazza H_i-t, és a H_i-n kívüli részeik páronként diszjunktak, tehát $m-1 \leq n - |H_i| \leq n-1$, azaz $m \leq n$ valóban teljesül.

A következő tétellel kezdődött a lineáris algebra használata a halmazrendszerek vizsgálatában (Bose, 1948, speciális esetre):

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Bizonyítás. Legyenek a tételben szereplő halmazok $H_1, \ldots, H_m$.
1. eset: *Ha valamelyik H_i elemszáma t*, akkor a metszetfeltétel miatt a többi $m-1$ halmaz tartalmazza H_i-t, és a H_i-n kívüli részeik páronként diszjunktak, tehát $m-1 \leq n - |H_i| \leq n-1$, azaz $m \leq n$ valóban teljesül.

2. eset: *Ha $|H_i| > t$ minden i-re,* tekintsük a karakterisztikus vektoraikat: $H_i = \{2, 3, 6\} \longleftrightarrow \boldsymbol{v_i} = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Megmutatjuk, hogy a $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, így $m \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1,\ldots,n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

2. eset: *Ha* $|H_i| > t$ *minden* i*-re:* $H_i \longleftrightarrow \boldsymbol{v_i} \in \mathbb{R}^n$ kar. vekt. Megmutatjuk, hogy a $\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_m}$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, így $m \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

$$|H_i \cap H_j| = \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle, \quad \text{ahol } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

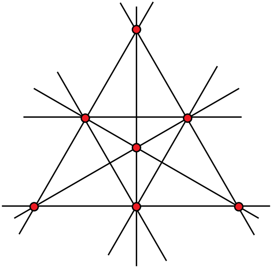
2. eset: *Ha* $|H_i| > t$ *minden* i*-re:* $H_i \longleftrightarrow \boldsymbol{v_i} \in \mathbb{R}^n$ kar. vekt. Megmutatjuk, hogy a $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, így $m \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

$$|H_i \cap H_j| = \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle, \quad \text{ahol } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Tehát ha tekintjük azt az $m \times n$-es A mátrixot, amelynek i-edik sora $\boldsymbol{v_i}$, akkor az AA^T mátrix (i, j) pozíciójában $|H_i \cap H_j|$ áll. Vagyis AA^T-ben a főátlón kívül mindenhol t áll, a főátlóban pedig t-nél nagyobb számok ($|H_i| > t$). Nem nehéz látni, hogy ebből $|AA^T| \neq 0$ következik, tehát $\mathrm{rk}(AA^T) = m$, és így $\mathrm{rk}(AA^T) \leq \mathrm{rk}(A) \leq m$ miatt $\mathrm{rk}(A) = m$, amit bizonyítani kellett. $\square$

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény (de Bruijn–Erdős, 1948). A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.



Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1,\dots,n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény (de Bruijn–Erdős, 1948). A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1,\dots,P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1,\dots,e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{e_1,\dots,e_n\}$ halmazt, melynek elemei legyenek a ponton átmenő e_* egyenesek.

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény (de Bruijn–Erdős, 1948). A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{e_1, \ldots, e_n\}$ halmazt, melynek elemei legyenek a ponton átmenő e_* egyenesek.

1. Különböző pontokhoz különböző halmazokat rendelünk. (Mivel nem kollineárisak a pontok.)

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény (de Bruijn–Erdős, 1948). A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{e_1, \ldots, e_n\}$ halmazt, melynek elemei legyenek a ponton átmenő e_* egyenesek.

1. Különböző pontokhoz különböző halmazokat rendelünk. (Mivel nem kollineárisak a pontok.)
2. $|H_i \cap H_j| = 1$ tetszőleges $i \neq j$ esetén. ($H_i \cap H_j$ a P_iP_j egyenest tartalmazza.)

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $t \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény (de Bruijn–Erdős, 1948). A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{e_1, \ldots, e_n\}$ halmazt, melynek elemei legyenek a ponton átmenő e_* egyenesek.

1. Különböző pontokhoz különböző halmazokat rendelünk. (Mivel nem kollineárisak a pontok.)
2. $|H_i \cap H_j| = 1$ tetszőleges $i \neq j$ esetén. ($H_i \cap H_j$ a P_iP_j egyenest tartalmazza.)
3. Fisher-egyenlőtlenség $(t = 1) \implies m \leq n$. □

Tétel (Berlekamp, 1969). Az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Tétel (Berlekamp, 1969). Az $\{1,\ldots,n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Megjegyzés I. Az egyelemű halmazok mutatják, hogy a felső korlát elérhető.

Megjegyzés II. A páros elemszám / páros metszet probléma esetén a halmazok száma akár $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ is lehet. (Ennél több nem.)

Megjegyzés III. A páros elemszám / páratlan metszet probléma esetén is n a felső korlát.

Tétel (Berlekamp, 1969). Az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesülnek a következők:
- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Bizonyítás. A tételben szereplő $H_1, \ldots, H_m$ halmazokat megint a karakterisztikus vektoraikkal reprezentáljuk: $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$.

Tétel (Berlekamp, 1969). Az $\{1,\ldots,n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \le n$.

Bizonyítás. A tételben szereplő $H_1,\ldots,H_m$ halmazokat megint a karakterisztikus vektoraikkal reprezentáljuk: $\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_m}$.
A metszetek elemszámai ismét kifejezhetők skaláris szorzatként:

$$|H_i \cap H_j| = \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle, \quad \text{ahol } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Tétel (Berlekamp, 1969). Az $\{1, \dots, n\}$ alaphalmaz m különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \le n$.

Bizonyítás. A tételben szereplő $H_1, \dots, H_m$ halmazokat megint a karakterisztikus vektoraikkal reprezentáljuk: $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_m}$.
A metszetek elemszámai ismét kifejezhetők skaláris szorzatként:

$$|H_i \cap H_j| = \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle, \quad \text{ahol } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Eszerint feltételeink a következő alakban is megfogalmazhatók:

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad (\text{minden } i\text{-re}),$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad (\text{minden } i \neq j\text{-re}).$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re),}$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re).}$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re),}$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re).}$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

A $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}\}$ tehát egy ortonormált rendszerre emlékeztet bennünket, és a standard bizonyítással következik ezen vektorok lineáris függetlensége az n-dimenziós $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérben is:

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

A $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}\}$ tehát egy ortonormált rendszerre emlékeztet bennünket, és a standard bizonyítással következik ezen vektorok lineáris függetlensége az n-dimenziós $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérben is:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v_m} = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

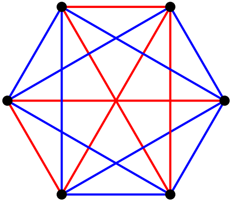
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

A $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}\}$ tehát egy ortonormált rendszerre emlékeztet bennünket, és a standard bizonyítással következik ezen vektorok lineáris függetlensége az n-dimenziós $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérben is:

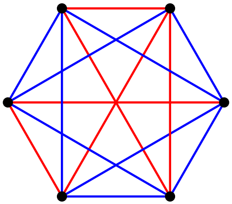
$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v_m} = \underline{\mathbf{0}}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \langle \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v_m}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \langle \underline{\mathbf{0}}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0$$

teljesül minden α_j együtthatóra. Tehát valóban $m \leq n$. $\square$

Erdős a véletlen módszer egyik első alkalmazásaként 1947-ben megmutatta, hogy ki tudjuk úgy színezni a $(\sqrt{2})^k$ pontú teljes gráf éleit úgy, hogy nem alakul ki se csupa kék élű, se csupa piros élű k pontú klikk.

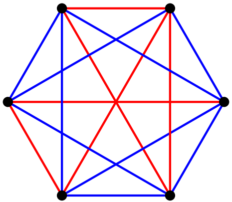


Erdős a véletlen módszer egyik első alkalmazásaként 1947-ben megmutatta, hogy ki tudjuk úgy színezni a $(\sqrt{2})^k$ pontú teljes gráf éleit úgy, hogy nem alakul ki se csupa kék élű, se csupa piros élű k pontú klikk.



Erdős bizonyítása nem konstruktív: bár igazolja a kívánt színezés létezését, nem mutat fel egy konkrét jó színezést.

Erdős a véletlen módszer egyik első alkalmazásaként 1947-ben megmutatta, hogy ki tudjuk úgy színezni a $(\sqrt{2})^k$ pontú teljes gráf éleit úgy, hogy nem alakul ki se csupa kék élű, se csupa piros élű k pontú klikk.



Erdős bizonyítása nem konstruktív: bár igazolja a kívánt színezés létezését, nem mutat fel egy konkrét jó színezést.

Feladat. Explicit módon adjunk meg minél nagyobb pontszámú, piros-kék élszínezett teljes gráfot, amelyben nincs k pontú „egyszínű" klikk. (Ramsey-tétel: 4^k ponton már nincs ilyen színezés.)

Feladat. Adjunk meg egy nagy pontszámú, piros-kék élszínezett teljes gráfot, amelyben nincs k pontú „egyszínű" klikk.

Feladat. Adjunk meg egy nagy pontszámú, piros-kék élszínezett teljes gráfot, amelyben nincs k pontú „egyszínű" klikk.

Erdős 100$-os problémája: Explicit módon konstruáljunk ilyen színezést $(1+c)^k$ ponton valamely $c>0$ konstanssal ($\forall k$-ra).

Feladat. Adjunk meg egy nagy pontszámú, piros-kék élszínezett teljes gráfot, amelyben nincs k pontú „egyszínű" klikk.

Erdős 100$-os problémája: Explicit módon konstruáljunk ilyen színezést $(1+c)^k$ ponton valamely $c > 0$ konstanssal ($\forall k$-ra).

Megjegyzés. A probléma máig megoldatlan, a ma ismert legjobb konstrukció pontszáma $k^{a \log k / \log\log k}$, ahol $a > 0$ konstans.

Feladat. Adjunk meg egy nagy pontszámú, piros-kék élszínezett teljes gráfot, amelyben nincs k pontú „egyszínű'' klikk.

Erdős 100$-os problémája: Explicit módon konstruáljunk ilyen színezést $(1+c)^k$ ponton valamely $c > 0$ konstanssal ($\forall k$-ra).

Megjegyzés. A probléma máig megoldatlan, a ma ismert legjobb konstrukció pontszáma $k^{a \log k / \log\log k}$, ahol $a > 0$ konstans.

$(k-1)^2$ pont esetén könnyű jó színezést találni, de még a $\Theta(k^2)$ nagyságrendtől is sokáig tartott elmozdulni. Az első lényeges előrelépés a következő $\binom{k-1}{3} = \Theta(k^3)$ pontszámú konstrukció volt:

Nagy Zsigmond (1972). Legyenek az $\{1, \ldots, k-1\}$ halmaz 3-elemű részhalmazai a csúcsok. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze kékkel, ha a metszetük egyelemű (más esetekben piros lesz az él). Ekkor nem alakul ki egyszínű k pontú klikk.

Nagy Zsigmond (1972). Legyenek az $\{1, \ldots, k-1\}$ halmaz 3-elemű részhalmazai a csúcsok. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze kékkel, ha a metszetük egyelemű (más esetekben piros lesz az él). Ekkor nem alakul ki egyszínű k pontú klikk.

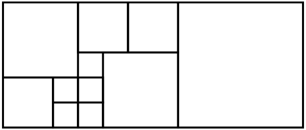
Bizonyítás. Egy kék klikk olyan (különböző) $H_1, \ldots, H_m \subseteq \{1, \ldots, k-1\}$ halmazoknak felel meg, hogy bármely kettő metszete egyelemű, tehát a Fisher-egyenlőtlenség miatt legfeljebb $k-1$ pontja lehet a kék klikkeknek.

Nagy Zsigmond (1972). Legyenek az $\{1, \ldots, k-1\}$ halmaz 3-elemű részhalmazai a csúcsok. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze kékkel, ha a metszetük egyelemű (más esetekben piros lesz az él). Ekkor nem alakul ki egyszínű k pontú klikk.

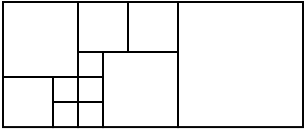
Bizonyítás. Egy kék klikk olyan (különböző) $H_1, \ldots, H_m \subseteq \{1, \ldots, k-1\}$ halmazoknak felel meg, hogy bármely kettő metszete egyelemű, tehát a Fisher-egyenlőtlenség miatt legfeljebb $k-1$ pontja lehet a kék klikkeknek.

Egy piros klikk olyan (különböző) $H_1, \ldots, H_m \subseteq \{1, \ldots, k-1\}$ halmazoknak felel meg, hogy mindegyik páratlan (3) elemszámú, és bármely kettő metszete páros (0 vagy 2) elemszámú, így most az „odd/even town'' tétel miatt kapjuk, hogy legfeljebb $k-1$ pontja lehet a piros klikkeknek. $\square$

Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.

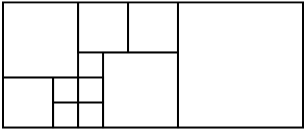


Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.



Megjegyzés. Ha az oldalak aránya racionális, akkor létezik ilyen parkettázás.

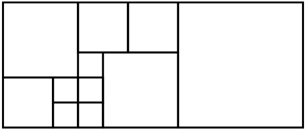
Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.



Megjegyzés. Ha az oldalak aránya racionális, akkor létezik ilyen parkettázás.

Észrevétel. Minden parkettázás esetén a parketták összterülete a leparkettázott téglalap területével egyenlő.

Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.



Megjegyzés. Ha az oldalak aránya racionális, akkor létezik ilyen parkettázás.

Észrevétel. Minden parkettázás esetén a parketták összterülete a leparkettázott téglalap területével egyenlő.

A fenti tétel bizonyításának lényege az, hogy olyan „álterületet" definálunk, hogy véges sok négyzet álterületének összege soha ne adja ki a parkettázandó téglalap álterületét.

Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.

Bizonyítás. Feltehető, hogy a téglalap oldalhosszai 1 és $r \in \mathbb{Q}^*$.

Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.

Bizonyítás. Feltehető, hogy a téglalap oldalhosszai 1 és $r \in \mathbb{Q}^*$. Először egy „álhosszt" adunk meg. Létezik egy olyan $l \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény („az x hosszú szakasz álhossza legyen $l(x)$"), amelyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tétel (Dehn, 1903). Ha egy téglalap oldalhosszainak aránya irracionális, akkor nem parkettázható véges sok négyzettel.

Bizonyítás. Feltehető, hogy a téglalap oldalhosszai 1 és $r \in \mathbb{Q}^*$. Először egy „álhosszt” adunk meg. Létezik egy olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény („az x hosszú szakasz álhossza legyen $l(x)$”), amelyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Legyen az x, y oldalhosszú téglalap álterülete $l(x) \cdot l(y)$. Ekkor teljesülnek a következők ($\Longrightarrow$ QED.):

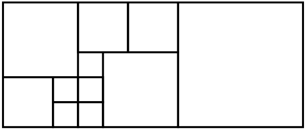
- A parkettázandó téglalap álterülete $l(1)l(r) = -1$.
- Minden négyzet álterülete nemnegatív: $l^2(x) \geq 0$.
- Ha egy T téglalapot téglalapokkal parkettázunk, akkor T álterülete a parketták álterületeinek összege (l additivitása miatt, illetve lásd ábra).

Bizonyítás. Feltehető, hogy a téglalap oldalhosszai 1 és $r \in \mathbb{Q}^*$. Először egy „álhosszt" adunk meg. Létezik egy olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény („az x hosszú szakasz álhossza legyen $l(x)$"), amelyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Legyen az x, y oldalhosszú téglalap álterülete $l(x) \cdot l(y)$. Ekkor teljesülnek a következők ($\Longrightarrow$ QED.):

- A parkettázandó téglalap álterülete $l(1)l(r) = -1$.
- Minden négyzet álterülete nemnegatív: $l^2(x) \geq 0$.
- Ha egy T téglalapot téglalapokkal parkettázunk, akkor T álterülete a parketták álterületeinek összege (l additivitása miatt, illetve lásd ábra).

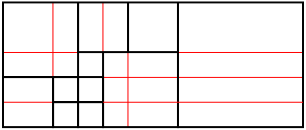


Bizonyítás. Feltehető, hogy a téglalap oldalhosszai 1 és $r \in \mathbb{Q}^*$. Először egy „álhosszt" adunk meg. Létezik egy olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény („az x hosszú szakasz álhossza legyen $l(x)$"), amelyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Legyen az x, y oldalhosszú téglalap álterülete $l(x) \cdot l(y)$. Ekkor teljesülnek a következők ($\Longrightarrow$ QED.):

- A parkettázandó téglalap álterülete $l(1)l(r) = -1$.
- Minden négyzet álterülete nemnegatív: $l^2(x) \geq 0$.
- Ha egy T téglalapot téglalapokkal parkettázunk, akkor T álterülete a parketták álterületeinek összege (l additivitása miatt, illetve lásd ábra).



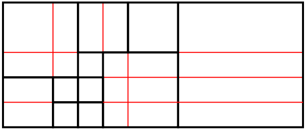
Hátravan még, hogy valóban létezik olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fgv., melyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hátravan még, hogy valóban létezik olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fgv., melyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ehhez végtelen dimenziós vektorterekre (Zorn-lemmára) van szükség, ezért most kevesebbet bizonyítunk, ami elég lesz nekünk: Egy indirekt feltételezett parkettázáshoz gyártunk olyan l-et, amely az

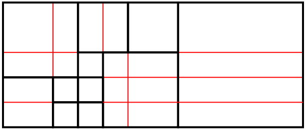


ábrában megjelenő összes téglalap $1, r, x_1, \ldots, x_n$ oldalhosszaira definiálva van (de l nincs értelmezve az egész $\mathbb{R}$-en).

Hátravan még, hogy valóban létezik olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fgv., melyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ehhez végtelen dimenziós vektorterekre (Zorn-lemmára) van szükség, ezért most kevesebbet bizonyítunk, ami elég lesz nekünk: Egy indirekt feltételezett parkettázáshoz gyártunk olyan l-et, amely az



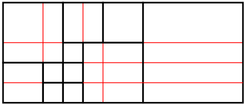
ábrában megjelenő összes téglalap $1, r, x_1, \ldots, x_n$ oldalhosszaira definiálva van (de l nincs értelmezve az egész $\mathbb{R}$-en).

A továbbiakban $\mathbb{R}$-re mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérre gondolunk, és ebben a vektortérben 1 és r lineárisan függetlenek, mert $r \in \mathbb{Q}^*$.

Hátravan még, hogy valóban létezik olyan $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fgv., melyre

$$l(1) = 1,\ l(r) = -1; \quad l(x+y) = l(x) + l(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Egy indirekt feltételezett parkettázáshoz gyártunk olyan l-et, amely az



ábrában megjelenő összes téglalap $1, r, x_1, \ldots, x_n$ oldalhosszaira definiálva van (de l nincs értelmezve az egész $\mathbb{R}$-en).

A továbbiakban $\mathbb{R}$-re mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérre gondolunk, és ebben a vektortérben 1 és r lineárisan függetlenek, mert $r \in \mathbb{Q}^*$.

Tekintsük az $U := [1, r, x_1, \ldots, x_n]$ (véges dimenziós) alterét $\mathbb{R}$-nek, és ebben egy $1, r, b_1, \ldots, b_m$ bázist. Legyen l az az $U \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés ($\mathbb{Q}$ felett), amely a bázisvektorokon $l(1) = 1$, $l(r) = -1$, $l(b_i) = 0$ -ként van definiálva ($i = 1, \ldots, m$). $\square$

Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel (1807, 1833, 1835).
Az egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba (véges sok sokszögre történő darabolással).

Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel (1807, 1833, 1835).
Az egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba (véges sok sokszögre történő darabolással).

Hilbert 3. problémája (1900). Van-e két olyan azonos alapterületű és magasságú tetraéder, amelyek nem darabolhatók egymásba (ha véges sok poliéderre darabolhatunk)?

Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel (1807, 1833, 1835).
Az egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba (véges sok sokszögre történő darabolással).

Hilbert 3. problémája (1900). Van-e két olyan azonos alapterületű és magasságú tetraéder, amelyek nem darabolhatók egymásba (ha véges sok poliéderre darabolhatunk)?

Hilbert egyik tanítványa, Dehn még 1900-ben megadott ilyen poliédereket, ezzel ez lett az elsőként megoldott Hilbert-probléma. Az átdarabolhatatlanság bizonyítása a parkettázásnál látott absztrakt lineáris algebrai eszközök („álszögek”) segítségével történt.

Wallace–Bolyai–Gerwien-tétel (1807, 1833, 1835).
Az egyenlő területű sokszögek átdarabolhatók egymásba (véges sok sokszögre történő darabolással).

Hilbert 3. problémája (1900). Van-e két olyan azonos alapterületű és magasságú tetraéder, amelyek nem darabolhatók egymásba (ha véges sok poliéderre darabolhatunk)?

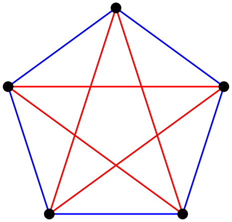
Hilbert egyik tanítványa, Dehn még 1900-ben megadott ilyen poliédereket, ezzel ez lett az elsőként megoldott Hilbert-probléma. Az átdarabolhatatlanság bizonyítása a parkettázásnál látott absztrakt lineáris algebrai eszközök („álszögek") segítségével történt.

Megjegyzés. Ezzel a módszerrel látható, hogy az egység térfogatú kocka és szabályos tetraéder nem darabolhatók egymásba.

Könnyű: Ha az m elemű $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazban bármely két pont távolsága ugyanannyi, akkor $m \leq n+1$ (extremális eset: szabályos szimplex csúcsai).

Könnyű: Ha az m elemű $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazban bármely két pont távolsága ugyanannyi, akkor $m \leq n+1$ (extremális eset: szabályos szimplex csúcsai).

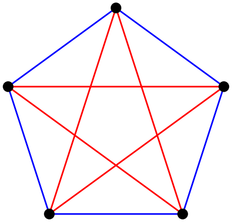
Mi a helyzet olyankor, ha kétféle távolságot engedünk meg? A síkon legfeljebb 5 pont helyezhető el így (nem bizonyítjuk).



Könnyű: Ha az m elemű $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazban bármely két pont távolsága ugyanannyi, akkor $m \leq n+1$ (extremális eset: szabályos szimplex csúcsai).

Mi a helyzet olyankor, ha kétféle távolságot engedünk meg? A síkon legfeljebb 5 pont helyezhető el így (nem bizonyítjuk).

Jelölje $m(n)$ a legnagyobb olyan m számot, amelyre m pont elhelyezhető úgy az $\mathbb{R}^n$ térben, hogy a pontpárok között legfeljebb kétféle távolság lépjen fel.



Könnyű: Ha az m elemű $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazban bármely két pont távolsága ugyanannyi, akkor $m \leq n+1$ (extremális eset: szabályos szimplex csúcsai).

Mi a helyzet olyankor, ha kétféle távolságot engedünk meg? A síkon legfeljebb 5 pont helyezhető el így (nem bizonyítjuk).

Jelölje $m(n)$ a legnagyobb olyan m számot, amelyre m pont elhelyezhető úgy az $\mathbb{R}^n$ térben, hogy a pontpárok között legfeljebb kétféle távolság lépjen fel.

Tétel (Larman–Rogers–Seidel, 1977).

$$\binom{n+1}{2} \leq m(n) \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$

Könnyű: Ha az m elemű $\mathbb{R}^n$-beli ponthalmazban bármely két pont távolsága ugyanannyi, akkor $m \leq n+1$ (extremális eset: szabályos szimplex csúcsai).

Mi a helyzet olyankor, ha kétféle távolságot engedünk meg? A síkon legfeljebb 5 pont helyezhető el így (nem bizonyítjuk).

Jelölje $m(n)$ a legnagyobb olyan m számot, amelyre m pont elhelyezhető úgy az $\mathbb{R}^n$ térben, hogy a pontpárok között legfeljebb kétféle távolság lépjen fel.

Tétel (Larman–Rogers–Seidel, 1977).

$$\binom{n+1}{2} \leq m(n) \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$

Megjegyzés. A legjobb felső becslés eddig (Blokhuis, 1984):

$$m(n) \leq \binom{n+2}{2}.$$

Tétel (Larman–Rogers–Seidel, 1977).

$$\binom{n+1}{2} \leq m(n) \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$

Bizonyítás. Az alsó becsléshez tekintsük $\mathbb{R}^{n+1}$-ben az összes olyan pontot, amelynek két koordinátája 1, a többi 0. Nyilvánvaló, hogy kétféle távolság lép fel közöttük: a $\sqrt{2}$ és a 2. Ez $\binom{n+1}{2}$ pont, és mindegyik rajta van az $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 2$ hipersíkon, ami $\mathbb{R}^n$-nel izomorf.

Tétel (Larman–Rogers–Seidel, 1977).

$$\binom{n+1}{2} \le m(n) \le \frac{1}{2}(n+1)(n+4).$$

Bizonyítás. Az alsó becsléshez tekintsük $\mathbb{R}^{n+1}$-ben az összes olyan pontot, amelynek két koordinátája 1, a többi 0. Nyilvánvaló, hogy kétféle távolság lép fel közöttük: a $\sqrt{2}$ és a 2. Ez $\binom{n+1}{2}$ pont, és mindegyik rajta van az $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 2$ hipersíkon, ami $\mathbb{R}^n$-nel izomorf.

A felső becsléshez tekintsünk egy tetszőleges $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m} \in \mathbb{R}^n$ ponthalmazt, amelyek pontpárjai között kétféle távolság lép fel: c és d. Minden $\boldsymbol{a_i}$-hez felveszünk egy n-változós polinomot:

$$p_i(\boldsymbol{x}) := (||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_i}||^2 - c^2)(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_i}||^2 - d^2).$$

A felső becsléshez tekintsünk egy tetszőleges $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m} \in \mathbb{R}^n$ ponthalmazt, amelyek pontpárjai között kétféle távolság lép fel: c és d. Minden $\boldsymbol{a_i}$-hez felveszünk egy n-változós polinomot:

$$p_i(\boldsymbol{x}) := (||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_i}||^2 - c^2)(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_i}||^2 - d^2).$$

Mivel

$$p_i(\boldsymbol{a_j}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq i \\ c^2 d^2 \neq 0, & \text{ha } j = i, \end{cases}$$

ezért a $p_1(\boldsymbol{x}), \ldots, p_m(\boldsymbol{x})$ polinomok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ vektortérben. (Miért?)

A felső becsléshez tekintsünk egy tetszőleges $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_m} \in \mathbb{R}^n$ ponthalmazt, amelyek pontpárjai között kétféle távolság lép fel: c és d. Minden $\boldsymbol{a_i}$-hez felveszünk egy n-változós polinomot:

$$p_i(\boldsymbol{x}) := (||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_i}||^2 - c^2)(||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a_i}||^2 - d^2).$$

Mivel

$$p_i(\boldsymbol{a_j}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq i \\ c^2 d^2 \neq 0, & \text{ha } j = i, \end{cases}$$

ezért a $p_1(\boldsymbol{x}), \dots, p_m(\boldsymbol{x})$ polinomok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ vektortérben. (Miért?) Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a $p_1, \dots, p_m$ polinomok benne vannak az

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^2, \quad (x_1^2 + \cdots + x_n^2)x_i, \quad x_i x_j, \quad x_i, \quad 1$$

polinomok által generált U altérben ($i, j = 1, \dots, n$), így

$$m \leq \dim(U) \leq 1 + n + n(n+1)/2 + n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+4). \qquad \square$$

J. Matoušek: Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra

Babai L.–Frankl P.: Linear Algebra Methods in Combinatorics

Babai László

Frankl Péter

Köszönöm a figyelmet!