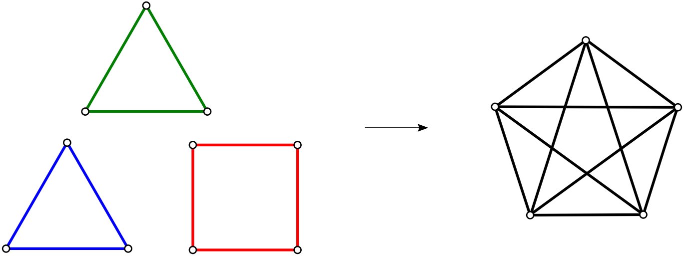
Lineáris algebrai módszerek a kombinatorikában

Nagy V. Gábor
SZTE Bolyai Intézet

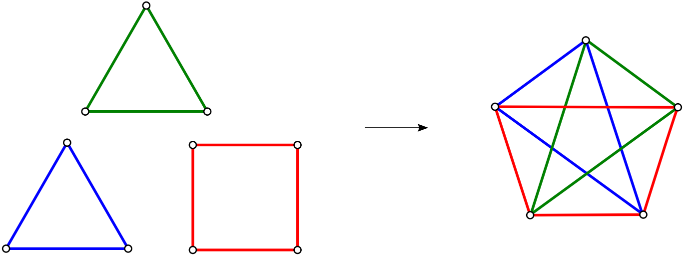
Eötvös Loránd Kollégium, Matematika Műhely
Szeged, 2013. október 25.

Definíció. A $G_1, \ldots, G_k$ gráfok pakolhatók a H gráfba, ha ezen gráfok éldiszjunkt példányai megtalálhatók H-ban részgráfként.

Definíció. A $G_1, \ldots, G_k$ gráfok pakolhatók a H gráfba, ha ezen gráfok éldiszjunkt példányai megtalálhatók H-ban részgráfként.

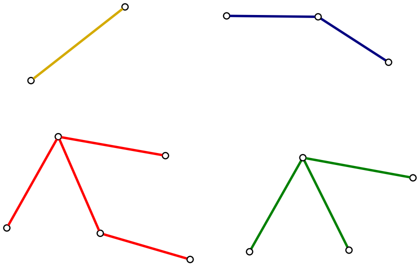


Definíció. A $G_1, \ldots, G_k$ gráfok pakolhatók a H gráfba, ha ezen gráfok éldiszjunkt példányai megtalálhatók H-ban részgráfként.



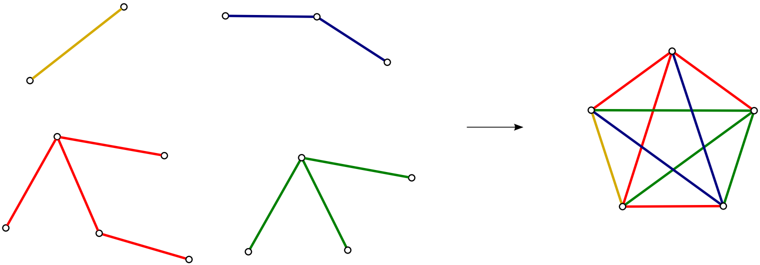
Definíció. A $G_1, \ldots, G_k$ gráfok pakolhatók a H gráfba, ha ezen gráfok éldiszjunkt példányai megtalálhatók H-ban részgráfként.

Sejtés (Gyárfás–Lehel, 1976). Legyen $T_1, \ldots, T_{n-1}$ fák tetszőleges olyan rendszere, amelyben T_i-nek i éle van. Ekkor $T_1, \ldots, T_{n-1}$ pakolható a K_n teljes gráfba.



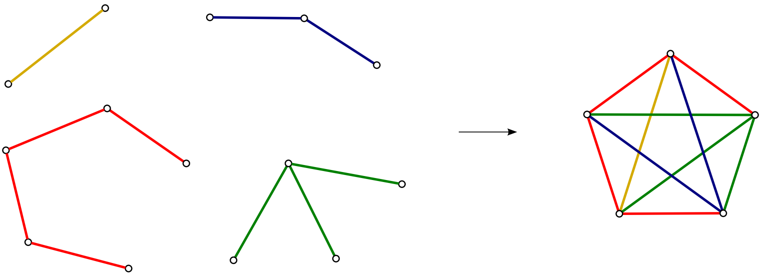
Definíció. A $G_1, \ldots, G_k$ gráfok pakolhatók a H gráfba, ha ezen gráfok éldiszjunkt példányai megtalálhatók H-ban részgráfként.

Sejtés (Gyárfás–Lehel, 1976). Legyen $T_1, \ldots, T_{n-1}$ fák tetszőleges olyan rendszere, amelyben T_i-nek i éle van. Ekkor $T_1, \ldots, T_{n-1}$ pakolható a K_n teljes gráfba.



Ez egy nagyon nehéz sejtés.

Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.



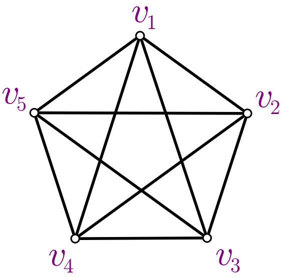
Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.

Bizonyítás (Zaks–Liu, 1977).
Dolgozzunk a szomszédsági mátrixszal!

Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.

Bizonyítás (Zaks–Liu, 1977).

Dolgozzunk a szomszédsági mátrixszal!

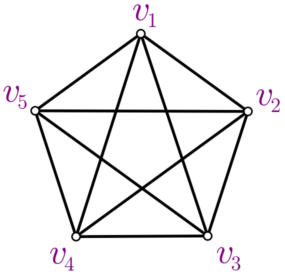


$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.

Bizonyítás (Zaks–Liu, 1977).

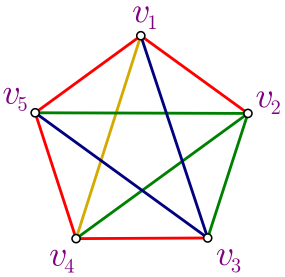
Dolgozzunk a szomszédsági mátrixszal!



$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & & & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & & & & 1 & 1 \\ v_4 & & & & & 1 \\ v_5 & & & & & \end{array}$$

Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.

Bizonyítás (Zaks–Liu, 1977).
Dolgozzunk a szomszédsági mátrixszal!

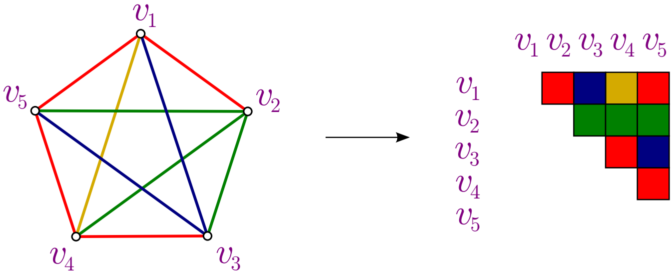


$$\begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_2 & & & 1 & 1 & 1 \\
v_3 & & & & 1 & 1 \\
v_4 & & & & & 1 \\
v_5 & & & & &
\end{array}$$

Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.

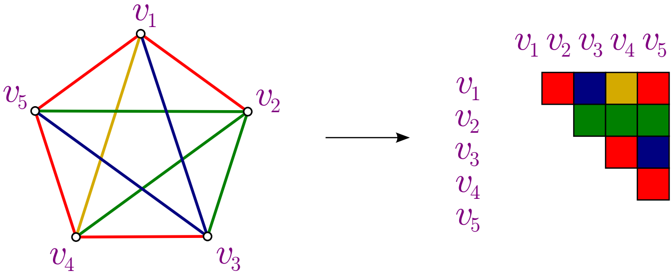
Bizonyítás (Zaks–Liu, 1977).

Dolgozzunk a szomszédsági mátrixszal!

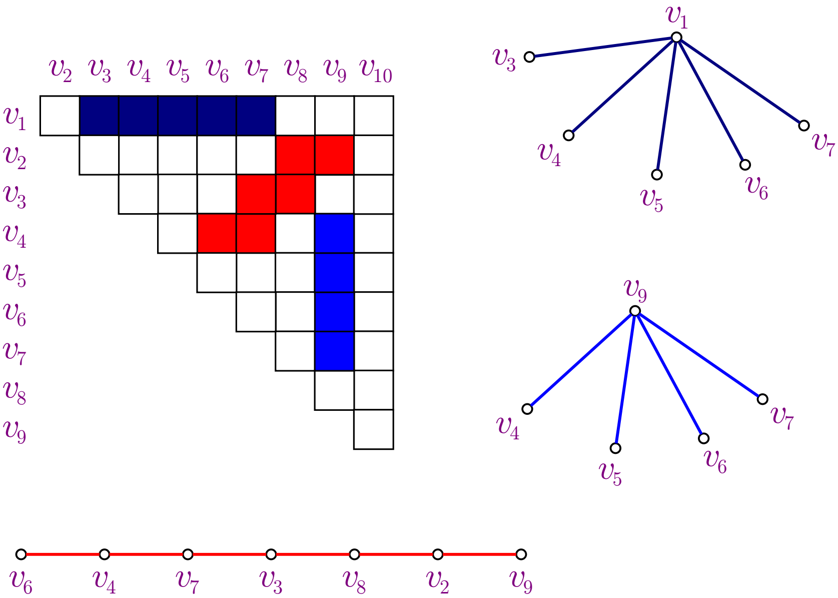


Tétel (Gyárfás–Lehel, 1976). Ha a sejtésben szereplő fák mindegyike út vagy csillag, akkor teljesül az állítás.

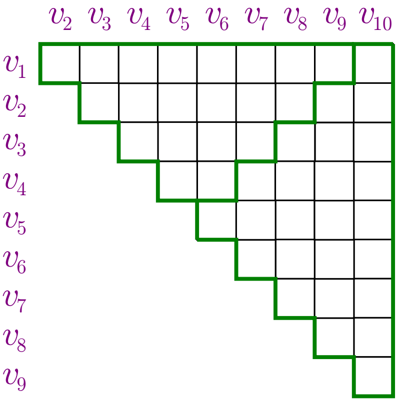
Bizonyítás (Zaks–Liu, 1977).
Dolgozzunk a szomszédsági mátrixszal!



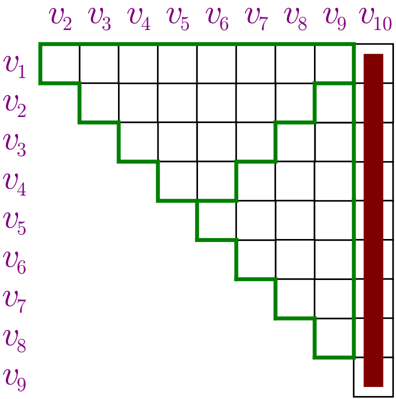
Olyan út, illetve csillag „parkettákat” fogunk használni, amelyek könnyen áttekinthetők a szomszédsági mátrixban.



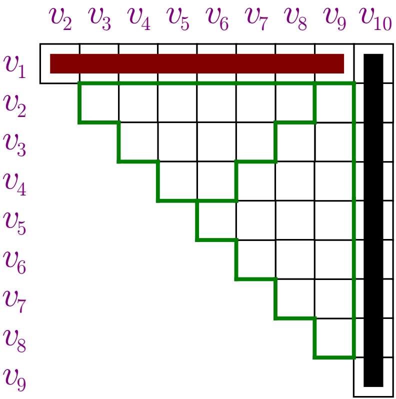
v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_{10}
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9
v_1 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7
v_9 v_4 v_5 v_6 v_7
v_6 v_4 v_7 v_3 v_8 v_2 v_9



T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



T_9: csillag

T_8: csillag

T_7: út

T_6: út

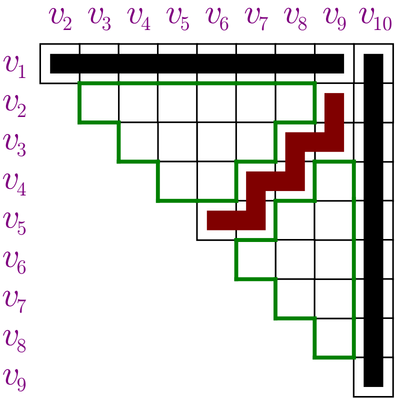
T_5: csillag

T_4: út

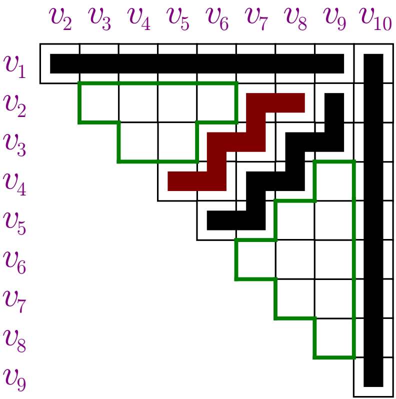
T_3: út

T_2: csillag

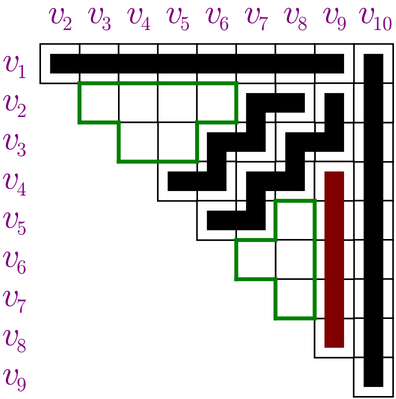
T_1: csillag



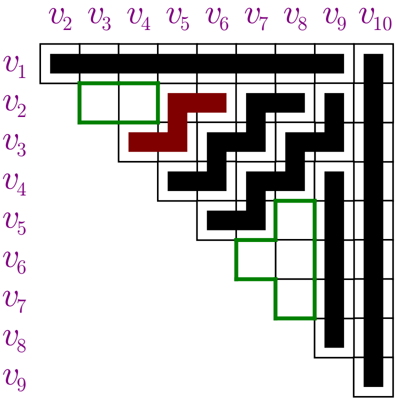
T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



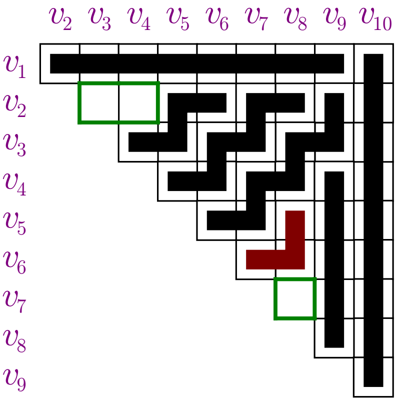
T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



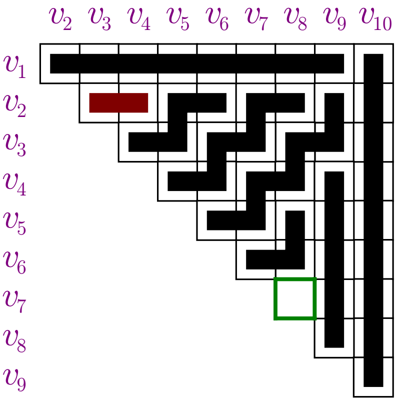
T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



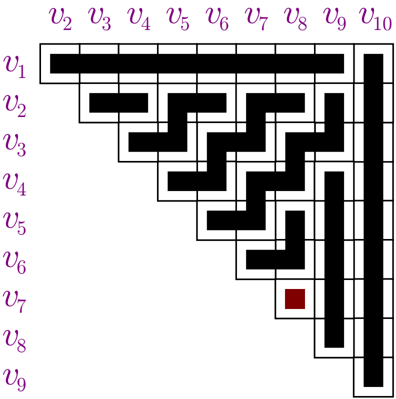
T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



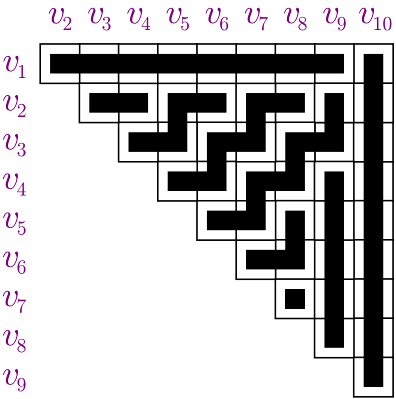
T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag



T_9: csillag
T_8: csillag
T_7: út
T_6: út
T_5: csillag
T_4: út
T_3: út
T_2: csillag
T_1: csillag

Páratlan n esetén hasonlóan járhatunk el. $\square$

Feladat. A $H_1, \ldots, H_{n+1}$ halmazok az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz tetszőleges nemüres részhalmazai. Igazoljuk, hogy a halmazrendszerből kiválaszthatók olyan $H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}; H_{j_1}, \ldots, H_{j_s}$ különböző halmazok $(r, s \geq 1)$, melyekre

$$H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_r} = H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_s}.$$

Feladat. A $H_1, \ldots, H_{n+1}$ halmazok az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz tetszőleges nemüres részhalmazai. Igazoljuk, hogy a halmazrendszerből kiválaszthatók olyan $H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}; H_{j_1}, \ldots, H_{j_s}$ különböző halmazok ($r, s \geq 1$), melyekre

$$H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_r} = H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_s}.$$

Megoldás. Tekintsük a halmazok karakterisztikus vektorait:

$$H_i = \{2, 3, 6\} \;\longleftrightarrow\; \boldsymbol{v_i} = (0, 1, 1, 0, 0, 1) \qquad \text{(itt } n = 6\text{)}$$

Feladat. A $H_1, \ldots, H_{n+1}$ halmazok az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz tetszőleges nemüres részhalmazai. Igazoljuk, hogy a halmazrendszerből kiválaszthatók olyan $H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}; H_{j_1}, \ldots, H_{j_s}$ különböző halmazok ($r, s \geq 1$), melyekre

$$H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_r} = H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_s}.$$

Megoldás. Tekintsük a halmazok karakterisztikus vektorait:

$$H_i = \{2, 3, 6\} \ \longleftrightarrow \ \boldsymbol{v_i} = (0, 1, 1, 0, 0, 1) \qquad \text{(itt } n = 6\text{)}$$

A $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+1}}$ vektorok lineárisan függők az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, azaz a nullvektor nemtriviális módon kikombinálható belőlük:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Feladat. A $H_1, \ldots, H_{n+1}$ halmazok az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz tetszőleges nemüres részhalmazai. Igazoljuk, hogy a halmazrendszerből kiválaszthatók olyan $H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}; H_{j_1}, \ldots, H_{j_s}$ különböző halmazok ($r, s \geq 1$), melyekre

$$H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_r} = H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_s}.$$

Megoldás. Tekintsük a halmazok karakterisztikus vektorait:

$$H_i = \{2, 3, 6\} \;\longleftrightarrow\; \boldsymbol{v_i} = (0, 1, 1, 0, 0, 1) \qquad (\text{itt } n = 6)$$

A $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+1}}$ vektorok lineárisan függők az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, azaz a nullvektor nemtriviális módon kikombinálható belőlük:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Vigyük át a negatív együtthatójú tagokat a jobb oldalra:

$$\beta_1 \boldsymbol{v_{i_1}} + \cdots + \beta_r \boldsymbol{v_{i_r}} = \gamma_1 \boldsymbol{v_{j_1}} + \cdots + \gamma_s \boldsymbol{v_{j_s}} \qquad (\beta_*, \gamma_* > 0)$$

Feladat. A $H_1, \ldots, H_{n+1}$ halmazok az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz tetszőleges nemüres részhalmazai. Igazoljuk, hogy a halmazrendszerből kiválaszthatók olyan $H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}; H_{j_1}, \ldots, H_{j_s}$ különböző halmazok $(r, s \geq 1)$, melyekre

$$H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_r} = H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_s}.$$

Megoldás. Tekintsük a halmazok karakterisztikus vektorait:

$$H_i = \{2, 3, 6\} \;\longleftrightarrow\; \boldsymbol{v_i} = (0, 1, 1, 0, 0, 1) \qquad \text{(itt } n = 6\text{)}$$

A $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+1}}$ vektorok lineárisan függők az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, azaz a nullvektor nemtriviális módon kikombinálható belőlük:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Vigyük át a negatív együtthatójú tagokat a jobb oldalra:

$$\beta_1 \boldsymbol{v_{i_1}} + \cdots + \beta_r \boldsymbol{v_{i_r}} = \gamma_1 \boldsymbol{v_{j_1}} + \cdots + \gamma_s \boldsymbol{v_{j_s}} \qquad (\beta_*, \gamma_* > 0)$$

A bal oldalon szereplő vektor pozitív komponensei által kijelölt halmaz $H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_r}$, a jobb oldalon pedig $H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_s}$. $\square$

Tétel (Berlekamp, 1969) Az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Tétel (Berlekamp, 1969) Az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Megjegyzés I. Az egyelemű halmazok mutatják, hogy a felső korlát elérhető.

Megjegyzés II. A páros elemszám / páros metszet probléma esetén a halmazok száma akár $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ is lehet. (Ennél több nem.)

Megjegyzés III. A páros elemszám / páratlan metszet probléma esetén is n a felső korlát.

Tétel (Berlekamp, 1969) Az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesülnek a következők:
- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Bizonyítás. A tételben szereplő $H_1, \ldots, H_m$ halmazokat ismét a karakterisztikus vektoraikkal reprezentáljuk: $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}$.

Tétel (Berlekamp, 1969) Az $\{1,\ldots,n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \leq n$.

Bizonyítás. A tételben szereplő $H_1,\ldots,H_m$ halmazokat ismét a karakterisztikus vektoraikkal reprezentáljuk: $\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_m}$.
A metszetek elemszámai kifejezhetők skaláris szorzatként:

$$|H_i \cap H_j| = \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle\,, \quad \text{ahol } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Tétel (Berlekamp, 1969) Az $\{1,\ldots,n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesülnek a következők:

- mindegyik halmaz páratlan elemszámú;
- bármely két különböző halmaz metszete páros elemszámú.

Ekkor $m \le n$.

Bizonyítás. A tételben szereplő $H_1,\ldots,H_m$ halmazokat ismét a karakterisztikus vektoraikkal reprezentáljuk: $\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_m}$.
A metszetek elemszámai kifejezhetők skaláris szorzatként:

$$|H_i \cap H_j| = \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle\,, \quad \text{ahol } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Eszerint feltételeink a következő alakban is megfogalmazhatók:

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} && (\text{minden } i\text{-re}),\\ &\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} && (\text{minden } i \ne j\text{-re}). \end{aligned}$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

A $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}\}$ tehát egy ortonormált rendszerre emlékeztet bennünket, és a standard bizonyítással következik ezen vektorok lineáris függetlensége a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérben is:

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re)},$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re)}.$$

A $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}\}$ tehát egy ortonormált rendszerre emlékeztet bennünket, és a standard bizonyítással következik ezen vektorok lineáris függetlensége a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérben is:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v_m} = \underline{\boldsymbol{0}}$$

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle \text{ páratlan} \quad \text{(minden } i\text{-re),}$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle \text{ páros} \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re).}$$

Dolgozzunk a $\mathbb{Z}_2$ kételemű test felett! Ekkor

$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 1 \quad \text{(minden } i\text{-re),}$$
$$\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0 \quad \text{(minden } i \neq j\text{-re).}$$

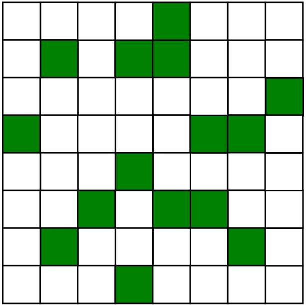
A $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_m}\}$ tehát egy ortonormált rendszerre emlékeztet bennünket, és a standard bizonyítással következik ezen vektorok lineáris függetlensége a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérben is:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v_m} = \underline{\mathbf{0}}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \langle \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{v_m}, \boldsymbol{v_j} \rangle = \langle \underline{\mathbf{0}}, \boldsymbol{v_j} \rangle = 0$$

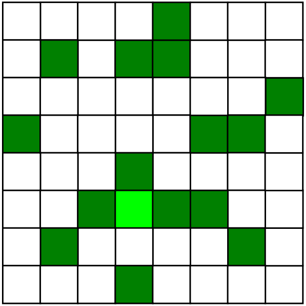
teljesül minden α_j együtthatóra. Tehát valóban $m \leq n$. $\square$

Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!

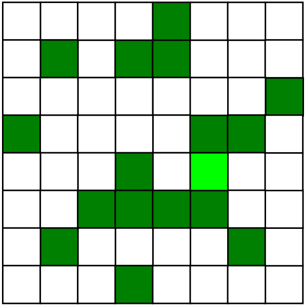
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



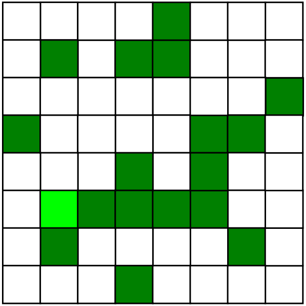
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



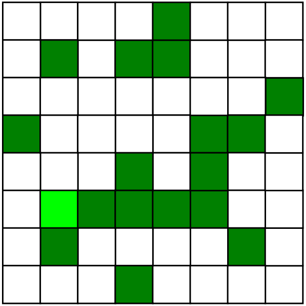
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



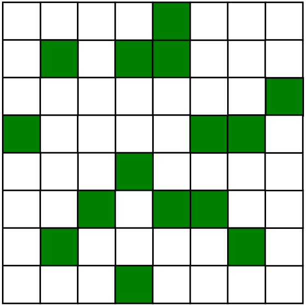
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzetnek legalább két oldalszomszédja füves, akkor ez a terület is befüvesedik (de csak ekkor). Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább n négyzetnek füvesnek kell lennie!



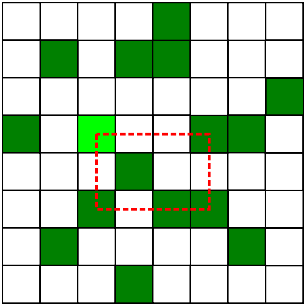
Megjegyzés. n kezdeti füves négyzettel (pl. az egyik átló mezőit választva) megoldható a füvesítés.

Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzet egy olyan rácstéglalap „csúcsa”, melynek másik három csúcsa már füves, akkor ő is befüvesedik. Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább $2n - 1$ négyzetnek füvesnek kell lennie!

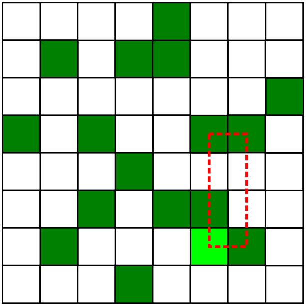
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzet egy olyan rácstéglalap „csúcsa”, melynek másik három csúcsa már füves, akkor ő is befüvesedik. Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább $2n - 1$ négyzetnek füvesnek kell lennie!



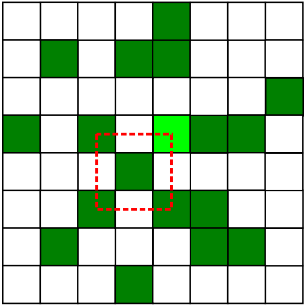
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzet egy olyan rácstéglalap „csúcsa”, melynek másik három csúcsa már füves, akkor ő is befüvesedik. Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább $2n-1$ négyzetnek füvesnek kell lennie!



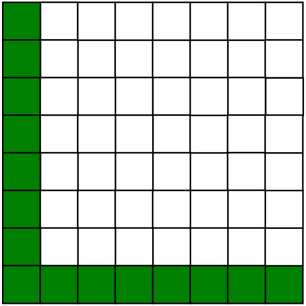
Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzet egy olyan rácstéglalap „csúcsa”, melynek másik három csúcsa már füves, akkor ő is befüvesedik. Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább $2n-1$ négyzetnek füvesnek kell lennie!



Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzet egy olyan rácstéglalap „csúcsa”, melynek másik három csúcsa már füves, akkor ő is befüvesedik. Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább $2n-1$ négyzetnek füvesnek kell lennie!



Feladat. Egy négyzet alakú földterület $n \times n$ kisebb négyzetre van felosztva. Ha egy négyzet egy olyan rácstéglalap „csúcsa”, melynek másik három csúcsa már füves, akkor ő is befüvesedik. Mutassuk meg, hogy ahhoz, hogy az egész terület befüvesedjen, kezdetben legalább $2n-1$ négyzetnek füvesnek kell lennie!



Megjegyzés. $2n-1$ kezdeti füves négyzettel (ld. ábra) megoldható a füvesítés.

Bizonyítás (Balogh–Bollobás–Morris–Riordan, 2012).

Tekintsünk egy tetszőleges $(2n-1)$-dimenziós valós V vektorteret, és abban egy $\{e, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n\}$ bázist. Az N négyzethez rendeljük hozzá a $v_N := x_i + y_j \in V$ elemet, ahol (i, j) a négyzet sor-oszlop pozíciója, és élünk az $x_1 = y_1 = e$ jelöléssel.

Bizonyítás (Balogh–Bollobás–Morris–Riordan, 2012).
Tekintsünk egy tetszőleges $(2n-1)$-dimenziós valós V vektorteret, és abban egy $\{e, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n\}$ bázist. Az N négyzethez rendeljük hozzá a $v_N := x_i + y_j \in V$ elemet, ahol (i, j) a négyzet sor-oszlop pozíciója, és élünk az $x_1 = y_1 = e$ jelöléssel.
Kulcsészrevétel. A füves négyzetekhez rendelt V-beli elemek által generált U altér invariáns a gyepesedési folyamat során.

Bizonyítás (Balogh–Bollobás–Morris–Riordan, 2012).
Tekintsünk egy tetszőleges $(2n-1)$-dimenziós valós V vektorteret, és abban egy $\{e, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n\}$ bázist. Az N négyzethez rendeljük hozzá a $v_N := x_i + y_j \in V$ elemet, ahol (i, j) a négyzet sor-oszlop pozíciója, és élünk az $x_1 = y_1 = e$ jelöléssel.
Kulcsészrevétel. A füves négyzetekhez rendelt V-beli elemek által generált U altér invariáns a gyepesedési folyamat során.
Oka. Csak azt kell megmutatni, hogy U nem bővülhet. Nézzünk meg egy gyepesedési lépést. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ téglalap A csúcsa füvesedik be (és B, C, D már füvesek).

Bizonyítás (Balogh–Bollobás–Morris–Riordan, 2012). Tekintsünk egy tetszőleges $(2n-1)$-dimenziós valós V vektorteret, és abban egy $\{e, x_2, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n\}$ bázist. Az N négyzethez rendeljük hozzá a $v_N := x_i + y_j \in V$ elemet, ahol (i, j) a négyzet sor-oszlop pozíciója, és élünk az $x_1 = y_1 = e$ jelöléssel.

Kulcsészrevétel. A füves négyzetekhez rendelt V-beli elemek által generált U altér invariáns a gyepesedési folyamat során.

Oka. Csak azt kell megmutatni, hogy U nem bővülhet. Nézzünk meg egy gyepesedési lépést. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ téglalap A csúcsa füvesedik be (és B, C, D már füvesek). Mivel

$$v_A = v_B + v_D - v_C,$$

ezért az új altér generátorelemei közé olyan elemet választunk be, amely előáll U-ban lévő elemek lineáris kombinációjaként. Tehát az altér valóban nem bővül.

Tekintsünk egy tetszőleges $(2n-1)$-dimenziós valós V vektorteret, és abban egy $\{e, x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n\}$ bázist. Az N négyzethez rendeljük hozzá a $v_N := x_i + y_j \in V$ elemet, ahol (i, j) a négyzet sor-oszlop pozíciója, és élünk az $x_1 = y_1 = e$ jelöléssel.

Kulcsészrevétel. A füves négyzetekhez rendelt V-beli elemek által generált U altér invariáns a gyepesedési folyamat során.

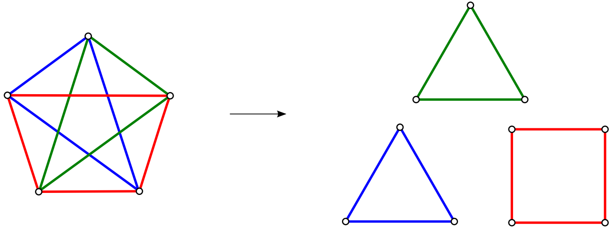
Oka. Csak azt kell megmutatni, hogy U nem bővülhet. Nézzünk meg egy gyepesedési lépést. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ téglalap A csúcsa füvesedik be (és B, C, D már füvesek). Mivel

$$v_A = v_B + v_D - v_C,$$

ezért az új altér generátorelemei közé olyan elemet választunk be, amely előáll U-ban lévő elemek lineáris kombinációjaként. Tehát az altér valóban nem bővül.

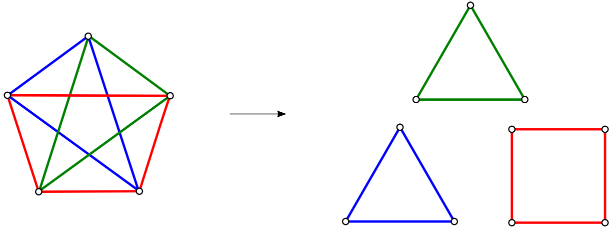
QED. $2n-1$-nél kevesebb füves négyzet V-nél szűkebb U-t generál, tehát nem érhető a cél, ui. ahhoz $U = V$ tartozik. (Miért?)

Definíció. A H gráf felbontható a $G_1, \ldots, G_k$ gráfokra, ha H élhalmaza előáll a G_i gráfok élhalmazainak diszjunkt uniójaként.



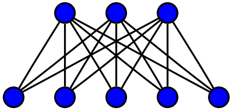
Megjegyzés. A gráffelbontás tulajdonképpen egy minden élt felhasználó pakolás.

Definíció. A H gráf felbontható a $G_1, \ldots, G_k$ gráfokra, ha H élhalmaza előáll a G_i gráfok élhalmazainak diszjunkt uniójaként.

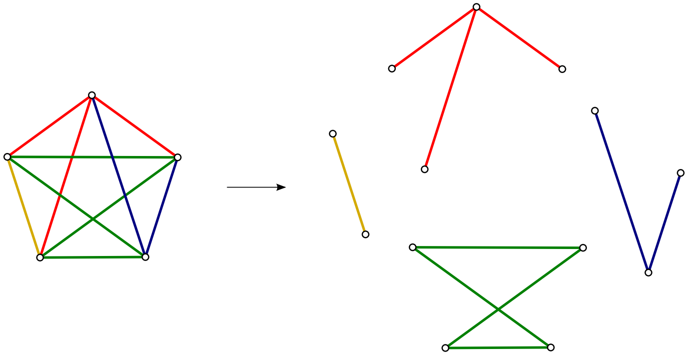


Megjegyzés. A gráffelbontás tulajdonképpen egy minden élt felhasználó pakolás.

Probléma. Szeretnénk a teljes gráfot minél kevesebb teljes páros gráfra felbontani.



Tétel (Graham–Pollak, 1971). Az n pontú teljes gráf nem bontható fel $(n-1)$-nél kevesebb teljes páros gráfra.



Megjegyzés. K_n mindig felbontható $n-1$ csillagra.

Tétel (Graham–Pollak, 1971). Az n pontú teljes gráf nem bontható fel $(n-1)$-nél kevesebb teljes páros gráfra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy felbontottuk K_n-et a $G_1, \ldots, G_m$ teljes páros gráfokra. Ismét dolgozzunk szomszédsági mátrixokkal: $K_n \longleftrightarrow A$ $G_i \longleftrightarrow B_i$.
A felbontás a mátrixok nyelvén azt jelenti, hogy

$$A = B_1 + \cdots + B_m.$$

Tétel (Graham–Pollak, 1971). Az n pontú teljes gráf nem bontható fel $(n-1)$-nél kevesebb teljes páros gráfra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy felbontottuk K_n-et a $G_1, \ldots, G_m$ teljes páros gráfokra. Ismét dolgozzunk szomszédsági mátrixokkal: $K_n \longleftrightarrow A$ $G_i \longleftrightarrow B_i$.

A felbontás a mátrixok nyelvén azt jelenti, hogy

$$A = B_1 + \cdots + B_m.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel (Graham–Pollak, 1971). Az n pontú teljes gráf nem bontható fel $(n-1)$-nél kevesebb teljes páros gráfra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy felbontottuk K_n-et a $G_1, \dots, G_m$ teljes páros gráfokra. Ismét dolgozzunk szomszédsági mátrixokkal: $K_n \longleftrightarrow A$ $G_i \longleftrightarrow B_i$.

A felbontás a mátrixok nyelvén azt jelenti, hogy

$$A = B_1 + \cdots + B_m.$$

$A = J - I$, ahol J az $n \times n$-es csupa-1 mátrix, I az egységmátrix. Nem nehéz látni, hogy a B_i mátrixok pedig előállnak $C_i + C_i^T$ alakban, ahol mindegyik C_i mátrix a nullmátrixból kapható egy almátrixának összes elemét 1-esre változtatva.

Tétel (Graham–Pollak, 1971). Az n pontú teljes gráf nem bontható fel $(n-1)$-nél kevesebb teljes páros gráfra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy felbontottuk K_n-et a $G_1, \ldots, G_m$ teljes páros gráfokra. Ismét dolgozzunk szomszédsági mátrixokkal: $K_n \longleftrightarrow A$ $G_i \longleftrightarrow B_i$.
A felbontás a mátrixok nyelvén azt jelenti, hogy

$$A = B_1 + \cdots + B_m.$$

$A = J - I$, ahol J az $n \times n$-es csupa-1 mátrix, I az egységmátrix. Nem nehéz látni, hogy a B_i mátrixok pedig előállnak $C_i + C_i^T$ alakban, ahol mindegyik C_i mátrix a nullmátrixból kapható egy almátrixának összes elemét 1-esre változtatva. Kaptuk, hogy

$$J - I = (C_1 + C_1^T) + \cdots + (C_m + C_m^T) = S + S^T,$$

ahol

$$S := C_1 + \cdots + C_m.$$

(1) $$J - I = S + S^T$$

(2) $$S = C_1 + \cdots + C_m, \quad \text{ahol } \mathrm{rk}(C_i) = 1.$$

(1) $$J - I = S + S^T$$

(2) $$S = C_1 + \cdots + C_m, \quad \text{ahol } \mathrm{rk}(C_i) = 1.$$

Ebből (2) alapján

$$\mathrm{rk}(S) = \mathrm{rk}(C_1 + \cdots + C_m) \leq \mathrm{rk}(C_1) + \cdots + \mathrm{rk}(C_m) = m.$$

Megmutatjuk, hogy (1)-ből pedig $\mathrm{rk}(S) \geq n - 1$ következik, ami a bizonyítandót adja.

(1) $$J - I = S + S^T$$

(2) $$S = C_1 + \cdots + C_m, \quad \text{ahol } \mathrm{rk}(C_i) = 1.$$

Ebből (2) alapján

$$\mathrm{rk}(S) = \mathrm{rk}(C_1 + \cdots + C_m) \le \mathrm{rk}(C_1) + \cdots + \mathrm{rk}(C_m) = m.$$

Megmutatjuk, hogy (1)-ből pedig $\mathrm{rk}(S) \ge n - 1$ következik, ami a bizonyítandót adja. Indirekt tfh. $\mathrm{rk}(S) \le n - 2$. Ekkor az

$$\begin{cases} S\boldsymbol{x} = \underline{\mathbf{0}} \\ J\boldsymbol{x} = \underline{\mathbf{0}} \end{cases}$$

egyenletrendszernek létezik egy nemtriviális $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ megoldása.

(1) $J - I = S + S^T$

(2) $S = C_1 + \cdots + C_m, \quad$ ahol $\mathrm{rk}(C_i) = 1.$

Ebből (2) alapján

$$\mathrm{rk}(S) = \mathrm{rk}(C_1 + \cdots + C_m) \leq \mathrm{rk}(C_1) + \cdots + \mathrm{rk}(C_m) = m.$$

Megmutatjuk, hogy (1)-ből pedig $\mathrm{rk}(S) \geq n-1$ következik, ami a bizonyítandót adja. Indirekt tfh. $\mathrm{rk}(S) \leq n-2$. Ekkor az

$$\begin{cases} S\boldsymbol{x} = \underline{\mathbf{0}} \\ J\boldsymbol{x} = \underline{\mathbf{0}} \end{cases}$$

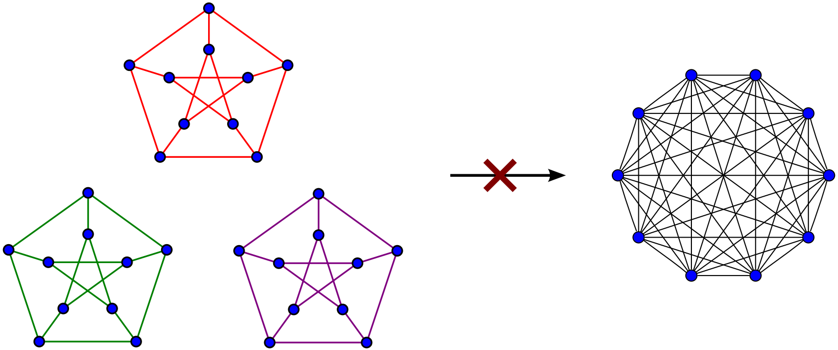
egyenletrendszernek létezik egy nemtriviális $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ megoldása. Erre az $\boldsymbol{x}$-re (1) szerint fennáll, hogy

$$-\boldsymbol{x} = J\boldsymbol{x} - I\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{x} + S^T\boldsymbol{x} = S^T\boldsymbol{x}$$

$$\Rightarrow \quad ||\boldsymbol{x}||^2 = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}^T S^T \boldsymbol{x} = -(S\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{x} = -\underline{\mathbf{0}}^T\boldsymbol{x} = 0,$$

ami ellentmondás (hiszen $\boldsymbol{x}$ nemtriviális). $\square$

Tétel. K_{10} nem bontható fel három Petersen-gráfra.



Tétel. K_{10} nem bontható fel három Petersen-gráfra.

Bizonyítás. Indirekt tfh. létezik ilyen felbontás, és legyenek a bepakolt Petersen-gráfok szomszédsági mátrixai A, B és C, azaz

$$J - I = A + B + C.$$

Tétel. K_{10} nem bontható fel három Petersen-gráfra.

Bizonyítás. Indirekt tfh. létezik ilyen felbontás, és legyenek a bepakolt Petersen-gráfok szomszédsági mátrixai A, B és C, azaz

$$J - I = A + B + C.$$

A Petersen-gráf szomszédsági mátrixának sajátértékei (akárhogy is pakoljuk be): $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$.

Tétel. K_{10} nem bontható fel három Petersen-gráfra.

Bizonyítás. Indirekt tfh. létezik ilyen felbontás, és legyenek a bepakolt Petersen-gráfok szomszédsági mátrixai A, B és C, azaz

$$J - I = A + B + C.$$

A Petersen-gráf szomszédsági mátrixának sajátértékei (akárhogy is pakoljuk be): $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$.

Spektráltétel. Bármely $\mathbb{R}^{n \times n}$-beli szimmetrikus M mátrixhoz létezik olyan Q ortogonális mátrix, amelyre $Q^{-1}MQ$ diagonális. Tehát M sajátértékei valósak, és létezik olyan ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, amelynek bázisvektorai sajátvektorai M-nek. Továbbá M sajátalterei merőlegesek egymásra, és dimenziójuk a hozzájuk tartozó sajátérték multiplicitásával egyezik meg.

Megjegyzés. A Petersen-gráf 3-regularitása miatt a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátaltér mindig $[(1, \ldots, 1)]$.

- $$J - I = A + B + C$$
- A, B, C sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$
- mindhárom mátrixnak sajátaltere az $U := [(1, \dots, 1)]$ altér.

- $$J - I = A + B + C$$
- A, B, C sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$
- mindhárom mátrixnak sajátaltere az $U := [(1, \ldots, 1)]$ altér.

Tekintsük az A, B mátrixok $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltereit, V_A-t és V_B-t. Ez két 5-dimenziós altér az $U^\perp$ 9-dimenziós altérben ($V_A, V_B \perp U$), tehát metszetük nemtriviális.

- $$J - I = A + B + C$$
- A, B, C sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$
- mindhárom mátrixnak sajátaltere az $U := [(1, \ldots, 1)]$ altér.

Tekintsük az A, B mátrixok $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltereit, V_A-t és V_B-t. Ez két 5-dimenziós altér az $U^\perp$ 9-dimenziós altérben ($V_A, V_B \perp U$), tehát metszetük nemtriviális.

Válasszunk egy $\boldsymbol{v}$ nem-nullvektort a metszetből, azaz olyan vektort, melyre $A\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. ($\boldsymbol{v}$-re oszlopvektorként tekintünk.) Mivel $\boldsymbol{v}$ merőleges $(1, \ldots, 1)$-re, ezért $J\boldsymbol{v} = \underline{0}$ is teljesül.

- $$J - I = A + B + C$$
- A, B, C sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$
- mindhárom mátrixnak sajátaltere az $U := [(1, \ldots, 1)]$ altér.

Tekintsük az A, B mátrixok $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltereit, V_A-t és V_B-t. Ez két 5-dimenziós altér az $U^\perp$ 9-dimenziós altérben ($V_A, V_B \perp U$), tehát metszetük nemtriviális.

Válasszunk egy $\boldsymbol{v}$ nem-nullvektort a metszetből, azaz olyan vektort, melyre $A\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. ($\boldsymbol{v}$-re oszlopvektorként tekintünk.) Mivel $\boldsymbol{v}$ merőleges $(1, \ldots, 1)$-re, ezért $J\boldsymbol{v} = \underline{0}$ is teljesül.

Ezekből

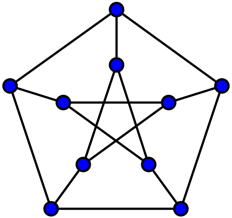
$$C\boldsymbol{v} = (J - I - A - B)\boldsymbol{v} = \underline{\boldsymbol{0}} - \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{v}$$

következik, ami ellentmondás, mert C-nek nem sajátértéke a -3.

$\square$

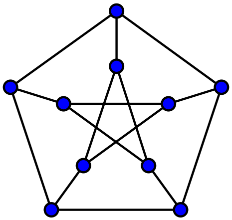
A Petersen-gráf sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.$

1. A Petersen-gráf 3-reguláris $\implies$ a 3 sajátérték (az $\underline{\mathbf{1}}$ s.v.).



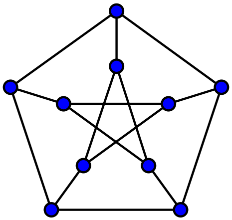
A Petersen-gráf sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.$

1. A Petersen-gráf 3-reguláris $\Longrightarrow$ a 3 sajátérték (az $\underline{\mathbf{1}}$ s.v.).
2. A Petersen-gráf összefüggő $\Longrightarrow$ a 3 egyszeres sajátérték.



A Petersen-gráf sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.$

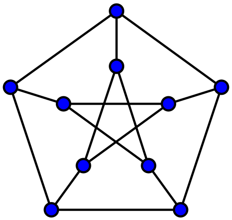
1. A Petersen-gráf 3-reguláris $\Longrightarrow$ a 3 sajátérték (az $\underline{\mathbf{1}}$ s.v.).
2. A Petersen-gráf összefüggő $\Longrightarrow$ a 3 egyszeres sajátérték.
3. Egy $\lambda \neq 3$ sajátértékhez tartozó $\boldsymbol{v}$ sajátvektor merőleges $\underline{\mathbf{1}}$-re.



A Petersen-gráf sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.$

1. A Petersen-gráf 3-reguláris $\implies$ a 3 sajátérték (az $\underline{\mathbf{1}}$ s.v.).
2. A Petersen-gráf összefüggő $\implies$ a 3 egyszeres sajátérték.
3. Egy $\lambda \neq 3$ sajátértékhez tartozó $\boldsymbol{v}$ sajátvektor merőleges $\underline{\mathbf{1}}$-re.
4. A Petersen-gráfban bármely két összekötött pontnak nincs közös szomszédja, és bármely két nem összekötött pontnak pontosan egy közös szomszédja van, emiatt

$$A^2 + A - 2I = J.$$



A Petersen-gráf sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.$

1. A Petersen-gráf 3-reguláris $\implies$ a 3 sajátérték (az $\underline{\mathbf{1}}$ s.v.).
2. A Petersen-gráf összefüggő $\implies$ a 3 egyszeres sajátérték.
3. Egy $\lambda \neq 3$ sajátértékhez tartozó $\boldsymbol{v}$ sajátvektor merőleges $\underline{\mathbf{1}}$-re.
4. A Petersen-gráfban bármely két összekötött pontnak nincs közös szomszédja, és bármely két nem összekötött pontnak pontosan egy közös szomszédja van, emiatt

$$A^2 + A - 2I = J.$$

5. Egy $\lambda \neq 3$ sajátértékhez tartozó $\boldsymbol{v}$ sajátvektorra

$$(\lambda^2 + \lambda - 2)\boldsymbol{v} = (A^2 + A - 2I)\boldsymbol{v} = J\boldsymbol{v} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Tehát minden 3-tól különböző sajátérték gyöke az $x^2 + x - 2$ polinomnak, azaz -2 vagy 1.

A Petersen-gráf sajátértékei: $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2.$

1. A Petersen-gráf 3-reguláris $\implies$ a 3 sajátérték (az $\underline{\mathbf{1}}$ s.v.).
2. A Petersen-gráf összefüggő $\implies$ a 3 egyszeres sajátérték.
3. Egy $\lambda \neq 3$ sajátértékhez tartozó $\boldsymbol{v}$ sajátvektor merőleges $\underline{\mathbf{1}}$-re.
4. A Petersen-gráfban bármely két összekötött pontnak nincs közös szomszédja, és bármely két nem összekötött pontnak pontosan egy közös szomszédja van, emiatt

$$A^2 + A - 2I = J.$$

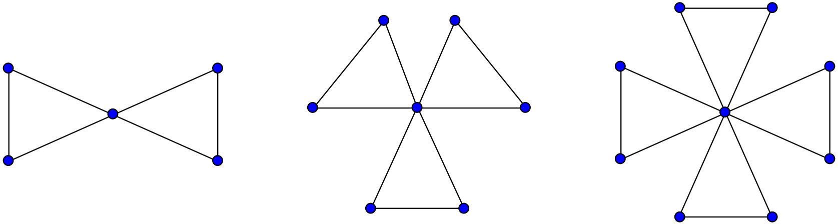
5. Egy $\lambda \neq 3$ sajátértékhez tartozó $\boldsymbol{v}$ sajátvektorra

$$(\lambda^2 + \lambda - 2)\boldsymbol{v} = (A^2 + A - 2I)\boldsymbol{v} = J\boldsymbol{v} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Tehát minden 3-tól különböző sajátérték gyöke az $x^2 + x - 2$ polinomnak, azaz -2 vagy 1.

6. A sajátértékek összege a mátrix nyoma, vagyis esetünkben 0. Ebből kitalálhatók a multiplicitások.

Barátság-tétel (Erdős–Rényi–T. Sós, 1966). Ha egy G egyszerű gráfban bármely két pontnak pontosan egy közös szomszédja van, akkor van olyan csúcs, mely az összes többi csúccsal össze van kötve. Sőt, G csak egy szélmalom-gráf lehet.



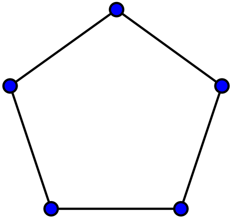
Észrevétel. Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, akkor a gráfnak legalább $1 + d + d(d-1) = d^2 + 1$ csúcsa van.

Észrevétel. Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, akkor a gráfnak legalább $1 + d + d(d-1) = d^2 + 1$ csúcsa van.

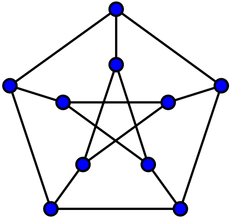
Hoffman–Singleton-tétel (1960). „*Beauty is rare.*"
Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, és a gráfnak $d^2 + 1$ csúcsa van, akkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$ lehet csak.

Észrevétel. Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, akkor a gráfnak legalább $1 + d + d(d-1) = d^2 + 1$ csúcsa van.

Hoffman–Singleton-tétel (1960). *„Beauty is rare."*
Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, és a gráfnak $d^2 + 1$ csúcsa van, akkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$ lehet csak.

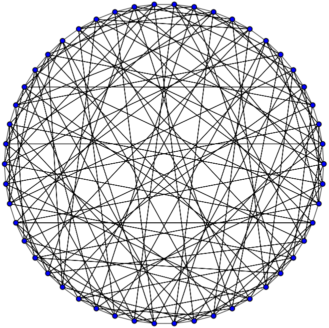


$d = 2$
C_5



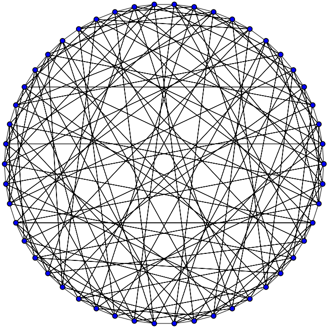
$d = 3$
Petersen-gráf

Hoffman–Singleton-tétel (1960). *„Beauty is rare."*
Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, és a gráfnak $d^2 + 1$ csúcsa van, akkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$ lehet csak.



$d = 7$
Hoffman–Singleton-gráf

Hoffman–Singleton-tétel (1960). *„Beauty is rare."*
Ha egy d-reguláris gráfban nincs 5-nél rövidebb kör, és a gráfnak $d^2 + 1$ csúcsa van, akkor $d \in \{2, 3, 7, 57\}$ lehet csak.



$d = 7$
Hoffman–Singleton-gráf

$d = 57$

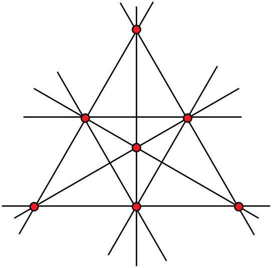
Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Megjegyzés. A Fisher-egyenlőtlenségre adott Bose-féle bizonyítás (1948) indította el a lineáris algebrai módszerek használatát a halmazrendszerek vizsgálatában.

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1,\ldots,n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény. A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.



Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény. A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmazt, amely a ponton átmenő e_* egyenesek indexeit tartalmazza.

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény. A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmazt, amely a ponton átmenő e_* egyenesek indexeit tartalmazza.

1. Különböző pontokhoz különböző halmazokat rendelünk. (Mivel nem kollineárisak a pontok.)

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény. A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmazt, amely a ponton átmenő e_* egyenesek indexeit tartalmazza.

1. Különböző pontokhoz különböző halmazokat rendelünk. (Mivel nem kollineárisak a pontok.)
2. $|H_i \cap H_j| = 1$ tetszőleges $i \neq j$ esetén. ($H_i \cap H_j$ a P_iP_j egyenes indexét tartalmazza.)

Fisher-egyenlőtlenség. Ha az $\{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz m darab különböző részhalmazára teljesül, hogy bármely kettő metszetének elemszáma ugyanaz a $\mu \neq 0$ szám, akkor $m \leq n$.

Következmény. A sík m nem kollineáris pontja legalább m egyenest határoz meg.

Bizonyítás. Legyen $P_1, \ldots, P_m$ egy nem kollineáris ponthalmaz, és legyenek $e_1, \ldots, e_n$ az általuk meghatározott egyenesek. Minden P_i ponthoz hozzárendelünk egy $H_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmazt, amely a ponton átmenő e_* egyenesek indexeit tartalmazza.

1. Különböző pontokhoz különböző halmazokat rendelünk.
   (Mivel nem kollineárisak a pontok.)
2. $|H_i \cap H_j| = 1$ tetszőleges $i \neq j$ esetén.
   ($H_i \cap H_j$ a $P_i P_j$ egyenes indexét tartalmazza.)
3. Fisher-egyenlőtlenség $\implies m \leq n$. $\square$

Babai L., Frankl P.: Linear Algebra Methods in Combinatorics

Babai László

Frankl Péter

Köszönöm a figyelmet!