8. Extremális gráfelmélet

Ebben a feladatsorban csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk!

1.$^-$ Mutassuk meg, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban ($n \geq 4$) nincs két független él (azaz nincs 2 élű párosítás), akkor a gráfnak legfeljebb $n-1$ éle lehet.

2. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz
a)$^-$ kört;
b) páratlan kört;
c) háromszöget;
d)$^+$ páros kört? [10.1]

3. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha a kromatikus száma k?

4. Adott n különböző pont az egységkörvonalon.
a) Legfeljebb hány pontpárra teljesül, hogy a pontok távolsága 1,8-nél nagyobb?
b) Legfeljebb hány pontpárra teljesül, hogy a pontok távolsága 1,5-nél nagyobb?
Segítség: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ és $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$

5. A $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in \mathbb{R}^3$ vektorok mindegyikének hossza legalább 1. Mutassuk meg, hogy azon $\{\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j}\}$ párok száma, amelyekre $||\boldsymbol{v_i} + \boldsymbol{v_j}|| < 1$, legfeljebb $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

6. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf derékbősége $2k$-nál nagyobb, akkor $n(n^{1/k}+1)$-nél kevesebb éle van.
Megjegyzés: A Bondy–Simonovits-tétel szerint már az is $O(n^{1+1/k})$ felső élszámkorlátot ad, ha csak a $2k$ hosszú köröket tiltjuk meg a gráfban.

7. (Kővári–Sós–Turán-tétel.) A G egyszerű gráfnak nem részgráfja $K_{r,s}$, ahol $2 \leq r \leq s$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb $\frac{\sqrt[r]{s-1}}{2} n^{2-1/r} + \frac{r-1}{2} n = O(n^{2-1/r})$ éle lehet. [10.37]
Segítség: Előadáson szerepelt az $r = s = 2$ eset bizonyítása, annak gondolatmenete értelemszerűen általánosítható. (A számolás lesz kicsit nehezebb.)
Megoldatlan sejtés: A pontos felső korlát nagyságrendje $\Theta(n^{2-1/r})$.

8. Adott a síkon n pont. Igazoljuk, hogy legfeljebb $O(n^{3/2})$ olyan pontpár van, melynek pontjai egységtávolságra vannak egymástól.
Segítség: Használjuk az előző feladatot.

9. Adott n pont a síkon ($n \geq 3$) úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Igazoljuk, hogy legfeljebb $3n-6$ pontpárra lehet a pontok távolsága pontosan 1.

10. Mutassuk meg, hogy ha egy gráf kromatikus száma k, akkor a gráf tartalmazza az összes k pontú fát részgráfként.

11.$^+$ n éhes matematikus hallgató m egyforma pizzán osztozkodik úgy, hogy mindenkinek ugyanakkora adag jár. Igazoljuk, hogy legalább $m+n-(m,n)$ pizzaszeletre kell vágni a pizzákat, és ennyi szelettel meg is oldható az elosztás, ahol (m,n) a legnagyobb közös osztót jelöli.

12.$^+$ Legyen T egy tetszőleges k élű fa. Az Erdős–T. Sós sejtés szerint ha egy n pontú G egyszerű gráf nem tartalmazza a T fát (részgráfként), akkor G-nek legfeljebb $\frac{k-1}{2}n$ éle lehet. Bizonyítsuk be a sejtést abban a speciális esetben, amikor T csillag vagy út.

13.$^+$ Három iskola mindegyikében n tanuló van. Minden tanuló a másik két iskolából együttvéve $n+1$ tanulót ismer. Bizonyítsuk be, hogy választható a három iskola mindegyikéből egy-egy tanuló úgy, hogy mindegyikük ismeri a másik kettőt. (Az ismeretségek kölcsönösek.)