7. Síkgráfok, metszési szám

Euler-formula: Ha a G *összefüggő* (szépen lerajzolt) síkgráfnak c csúcsa, e éle, és t tartománya van, akkor $c - e + t = 2$.

Kuratowski-tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nem tartalmazza sem a K_5, sem $K_{3,3}$ egyik felosztását sem részgráfként.

Wagner-tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nincs benne sem K_5-minor, sem $K_{3,3}$-minor.

1. Egy nemzetközi konferencián egy asztalnál öt különböző ország egy-egy képviselője ül. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos. (Az országok topológiai értelemben összefüggők.)

2. Mutassuk meg, hogy ha egy konvex poliéderben bármely két csúcs szomszédos, akkor a poliéder egy tetraéder.

3. Legyen G egy Hamilton-körrel rendelkező síkba rajzolt gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartományai 4 színnel jól színezhetők (a négyszíntétel felhasználása nélkül).

4. Mutassuk meg, hogy ha egy síkgráfban minden pont foka páros, akkor tartományai 2 színnel jól színezhetők (tetszőleges síkbarajzolás esetén). [5.26]

5. Egy síkgráfban minden pont foka páros. Síkba lehet-e úgy rajzolni, hogy a külső tartomány ötszög legyen, a belső tartományok pedig háromszögek? [5.28/a]

6. Egy 20 csúcsú konvex poliédernek 12 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?

7. Igazoljuk a következőket:

a) Minden egyszerű, legalább 3 pontú G síkgráfra $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

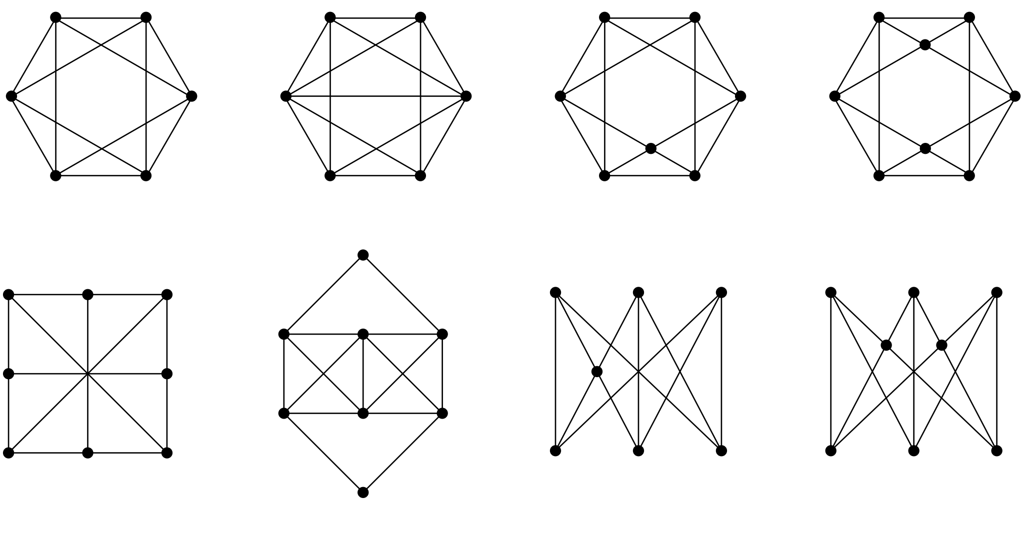
b) Minden egyszerű, háromszögmentes, legalább 3 pontú G síkgráfra $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

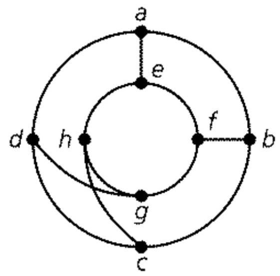
c) Ha a G síkgráfban van kör, és derékbősége legalább g, akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}|V(G)| - \frac{2g}{g-2}$.

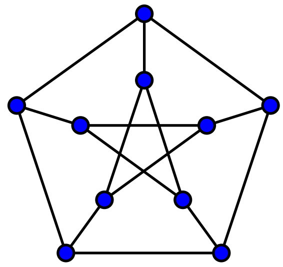
8. Igazoljuk, hogy nincs olyan konvex poliéder, amelynek minden lapja hatszög.

9. A G_8 egyszerű gráf csúcsai a 8×8-as sakktábla mezői, és két csúcs (mező) pontosan akkor összekötött, ha egyikből a másikba a király át tud lépni (egy lépésben). Döntsük el, hogy ez a gráf síkgráf-e.

10. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok közül melyek síkgráfok.



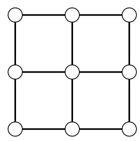




11. a) Határozzuk meg az előző feladat gráfjainak metszési számát. (A Petersen-gráfé nehéz.)
b) Határozzuk meg K_6 metszési számát.
c) Határozzuk meg $K_{4,4}$ metszési számát.

12. Létezik-e olyan 6 pontú gráf, hogy se ő, se a komplementere nem síkbarajzolható?

13. Mutassuk meg, hogy az ábrán látható 3×3-as négyzetrács-gráfnak van K_4-minorja.



14. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú egyszerű síkgráf tetszőleges három különböző x, y, z csúcsára

$$d(x) + d(y) + d(z) \leq 2n + 2.$$

15. a) Igaz-e, hogy ha H topologikus részgráfja G-nek, akkor H minorja G-nek?
b) Igaz-e, hogy ha H minorja G-nek, akkor H topologikus részgráfja G-nek?
c)$^+$ Síkgráf-karakterizációs tételekre való hivatkozás nélkül bizonyítsuk be, hogy G-nek pontosan akkor minorja $K_{3,3}$ vagy K_5, ha G-nek topologikus részgráfja $K_{3,3}$ vagy K_5.