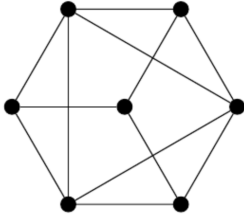


## 6. ÉLSZÍNEZÉSEK

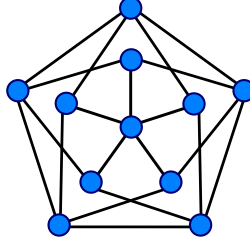
**Vizing-tétel:** Ha  $G$  egyszerű gráf, akkor  $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$ . (Tehát egyszerű gráfok esetén  $\chi_e(G) = \Delta(G)$  vagy  $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1$ .)

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok élkromatikus számát.

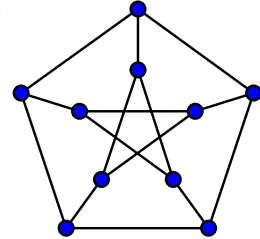
a)



b)



c)



- d)  $C_9$ -ből a körön másodsomszédos csúcsok összekötésével nyert gráf,  
e)  $K_n$  teljes gráf.

2. a) Mutassuk meg, hogy minden 3-reguláris, Hamilton-kört tartalmazó gráf élkromatikus száma 3.

b) Van-e Hamilton-kör a Petersen-gráfban?

c)  $G$  egy hurokélmentes 3-reguláris gráf, melynek élkromatikus száma 3, és  $G$  élei a színek permutálásától eltekintve egyféleképpen színezhetők jól 3 színnel. Igazoljuk, hogy  $G$ -ben van Hamilton-kör.

3.  $G$  egy összefüggő, 3-reguláris egyszerű gráf, amelyben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf már nem lesz összefüggő. Igazoljuk, hogy  $\chi_e(G) = 4$ .

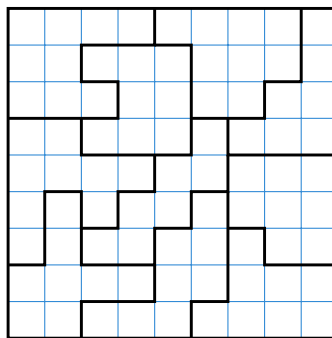
4. Legyen  $G$  egy egyszerű gráf. Jelölje  $G^{(2)}$  azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy vesszük  $G$  két csúcsdiszjunkt példányát, és minden csúcsot összekötünk a másik példánybeli „klónjával” (összesen  $|V(G)|$  új élt behúзва). Igazoljuk, hogy  $G^{(2)}$  élkromatikus száma  $\Delta(G) + 1$ .

5. a) Igazoljuk, hogy egy  $d$ -reguláris páros gráf élkromatikus száma  $d$ .

b) Igazoljuk, hogy ha  $G$  **páros gráf**, akkor  $\chi_e(G) = \Delta(G)$ .

6. A  $G$  gráf jól élszínezhető  $k$  színnel. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -nek van olyan jó élszínezése  $k$  színnel, amelyben minden szín  $\lfloor \frac{|E(G)|}{k} \rfloor$ -szer vagy  $\lceil \frac{|E(G)|}{k} \rceil$ -szer fordul elő.

7.+ A Bolyai Sudokuban a  $9 \times 9$ -es négyzet kisebb tartományra van osztva úgy, hogy minden tartomány legfeljebb 9 mezőből áll. A tartományok tetszőleges alakúak lehetnek, egy példát mutat a lenti ábra. Igazoljuk, hogy a Bolyai Sudoku mezői kitölthetők 1-től 9-ig terjedő számokkal úgy, hogy semelyik sorban és semelyik tartományban ne legyen két egyforma szám. (Az oszlopokra nem követeljük meg ezt.)



8.+ Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges hurokélmentes  $G$  gráfra  $\chi_e(G) \leq 3 \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil$ .

Segítség: Használjuk fel a III/13. feladatot. (Először vizsgáljunk  $2k$ -reguláris gráfokat.)

Megjegyzés: Ez a feladat már majdnem **Shannon tétele**, mely szerint  $\chi_e(G) \leq \lceil \frac{3\Delta(G)}{2} \rceil$ .

**9.+** Igazoljuk, hogy  $K_{2n+1}$  élhalmaza előáll  $n$  darab Hamilton-kör élhalmazának (diszjunkt) uniójaként.